

Práctico N° 3 - Determinantes

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcular utilizando la definición sus determinantes.
- Verificar los resultados desarrollando por los elementos de una línea los determinantes de D, E y F.
- Utilizar convenientemente las propiedades de determinantes para hacer aparecer ceros y volver a verificar los resultados anteriores para D, E y F.

2. Calcular los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 3+\sqrt{2} & \sqrt{5}+1 \\ \sqrt{5}-1 & 3-\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 3+\sqrt{7} & \sqrt{7}-1 \\ 6 & 3+\sqrt{7} \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} -4 & b-4 & a+1 & b \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -8 & b-8 & a & b \\ 5 & 3 & x & 3 \end{vmatrix} \quad f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

3. Resolver:

$$a) \begin{vmatrix} 2+x & 3-x & 1+8x \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad b) \begin{vmatrix} x+2 & x+7 & x+6 \\ x+9 & x+5 & x+1 \\ x+4 & x+3 & x+8 \end{vmatrix} = 0 \quad c) \begin{vmatrix} x & x+4 & 1 \\ x-1 & 2x & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = x+2 \quad e) \begin{vmatrix} x-1 & 2 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 1 \quad f) \begin{vmatrix} x^4+7 & x^4-1 & x^4+1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 119$$

$$g) \begin{vmatrix} x^2-1 & 2x-2 & 3x-3 \\ 2x & 4x & 0 \\ 0 & 12-4x & x-3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ -1 & x-2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3x-3 & 3y & 3z-2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+3 & 2y & 2z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

5. Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

(sug: sustituya la columna 2, por ella menos la columna 1.....)

6. Demostrar sin calcular que los siguientes determinantes son nulos.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 16 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 2a & 0 \\ 2a & 0 & 3b \\ 4a & 3b & 6b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 \\ b & b & -b & b \\ c & b+c+1 & -1 & -b \\ d & 3 & 2 & d-5 \end{vmatrix}$

7. Hallar los valores de x e y que hacen que:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1+y+a & x+3 & 2 \\ 2y & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

8. Demostrar o citar un contraejemplo en cada una de las siguientes proposiciones:

$$\text{Det}(A+B) = \text{Det} A + \text{Det} B$$

$$\text{Det}(A+B)^2 = \text{Det}^2(A+B)$$

$$\text{Det}(A+B)^2 = \text{Det}(A^2 + 2AB + B^2)$$

$$\text{Det}(A+B)(A-B) = \text{Det}(A^2 - B^2)$$

$$\text{Det}(AB) + \text{Det}(BA) = 2 \cdot \text{Det}(AB)$$

9. Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de Cramer y escalerizando si es necesario:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 6x + z = 1 \\ 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x - y - z = 5 \\ 6x + 2y + 2z = -10 \\ x + 6y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5y - 5z + 2t = -75 \\ 4x - 3z + t = 7 \\ 3y - 4z - 5t = -25 \\ -2x - 4y + z - 4t = -11 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y - 5z - t = 7 \\ 2x + 3y + 2z - t = 22 \\ -4x + 4z - 4t = 4 \\ -x + 3y + 4z = 22 \end{cases}$$

10. Resolver y discutir según m, $m \in \mathbb{R}$, los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2(m+1)x + (m+3)y = 1 \\ -4x - my = -m \end{cases} \quad \begin{cases} 2mx - 4y = m \\ (m-3)x + (m-1)y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} (m^2 - 4)x + (10m + 20)y = 0 \\ (m-3)x - 2(3-m)y = m^2 - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (1-2m)y - 3z = 1 \\ (1-3m)y - (m+3)z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 2m \\ x - y + z = -2m \\ mx + y + 2z = m^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (m+2)x - y + 2z = 3 \\ (m^2)x - 2y + 4z = m \\ (m+7)x + 3y - 6z = -9 \end{cases}$$