Práctico Nº 3 - Determinantes

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-6 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 4\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 8 & 2 & 6\end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix}-6 & -2 & 3\\ 5 & -1 & -2\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

   i) Calcular utilizando la definición sus determinantes.
   ii) Verificar los resultados desarrollando por los elementos de una línea los determinantes de D, E y F.
   iii) Utilizar convenientemente las propiedades de determinantes para hacer aparecer ceros y volver a verificar los resultados anteriores para D, E y F.

2. Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\begin{vmatrix}3+\sqrt{2} & \sqrt{5}+1\\ \sqrt{5}-1 & 3-\sqrt{2}\end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix}3+\sqrt{7} & \sqrt{7}-1\\ 6 & 3+\sqrt{7}\end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$d)\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1 & -3\\ -5 & -1 & -3 & -5\\ -3 & -1 & 2 & 1\end{vmatrix} \quad e)\begin{vmatrix}-4 & b-4 & a+1 & b\\ 3 & 3 & 1 & 0\\ -8 & b-8 & a & b\\ 5 & 3 & x & 3\end{vmatrix} \quad f)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 1 & 2 & & n-1\\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

3. Resolver:

$$a)\begin{vmatrix}2+x & 3-x & 1+8x\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \quad b)\begin{vmatrix}x+2 & x+7 & x+6\\ x+9 & x+5 & x+1\\ x+4 & x+3 & x+8\end{vmatrix}=0 \quad c)\begin{vmatrix}x & x+4 & 1\\ x-1 & 2x & 2\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$d)\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & x & 0\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=x+2 \quad e)\begin{vmatrix}x-1 & 2 & x+1\\ 1 & x+1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=x^2-1 \quad f)\begin{vmatrix}x^4+7 & x^4-1 & x^4+1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=119$$

$$g)\begin{vmatrix}x^2-1 & 2x-2 & 3x-3\\ 2x & 4x & 0\\ 0 & 12-4x & x-3\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}x-1 & 2 & 3\\ -1 & x-2 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

4. Si $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1$. Calcular:

$$\begin{vmatrix}2x & 2y & 2z\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}x & y & z\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}3x-3 & 3y & 3z-2\\ 3 & 0 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}x & y & z\\ 2x+3 & 2y & 2z+2\\ x+1 & y+1 & z+1\end{vmatrix}$$

5. Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

(sug: sustituya la columna 2, por ella menos la columna 1.....)

6. Demostrar sin calcular que los siguientes determinantes son nulos.

$a)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 16 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 2a & 0 \\ 2a & 0 & 3b \\ 4a & 3b & 6b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 \\ b & b & -b & b \\ c & b+c+1 & -1 & -b \\ d & 3 & 2 & d-5 \end{vmatrix}$

7. Hallar los valores de x e y que hacen que:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1+y+a & x+3 & 2 \\ 2y & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

8. Demostrar o citar un contraejemplo en cada una de las siguientes proposiciones:

Det (A + B) = Det A + Det B

Det $(A + B)^2 = \text{Det}^2 (A + B)$

Det $(A + B)^2 = \text{Det } (A^2 + 2AB + B^2)$

Det (A+B)(A–B) = Det $(A^2\text{-}B^2)$

Det(AB)+Det(BA) = 2.Det(AB)

9. Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de Cramer y escalerizando si es necesario:

$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 6x + z = 1 \\ 2y - 3z = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x - y - z = 5 \\ 6x + 2y + 2z = -10 \\ x + 6y + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -5x - 5y - 5z + 2t = -75 \\ 4x - 3z + t = 7 \\ 3y - 4z - 5t = -25 \\ -2x - 4y + z - 4t = -11 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 4y - 5z - t = 7 \\ 2x + 3y + 2z - t = 22 \\ -4x + 4z - 4t = 4 \\ -x + 3y + 4z = 22 \end{cases}$

10. Resolver y discutir según m, $m \in \Re$, los siguientes sistemas:

$\begin{cases} 2(m+1)x + (m+3)y = 1 \\ -4x - my = -m \end{cases}$ $\begin{cases} 2mx - 4y = m \\ (m-3)x + (m-1)y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} (m^2-4)x + (10m+20)y = 0 \\ (m-3)x - 2(3-m)y = m^2 - 9 \end{cases}$

$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (1-2m)y - 3z = 1 \\ (1-3m)y - (m+3)z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z = 2m \\ x - y + z = -2m \\ mx + y + 2z = m^2 \end{cases}$ $\begin{cases} (m+2)x - y + 2z = 3 \\ (m^2)x - 2y + 4z = m \\ (m+7)x + 3y - 6z = -9 \end{cases}$