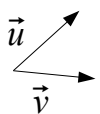


Práctico N° 4

Vectores en el plano.

1) Dados los vectores \vec{u} y \vec{v} :



a) Construya: $\vec{w}_1 = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{u}$ $\vec{w}_2 = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$ y $\vec{w}_3 = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$

b) Verifique geométrica y analíticamente que $\vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{v}$

2) Si \vec{v} y \vec{w} son dos vectores ortogonales cuyos módulos son 2 y 3 unidades respectivamente, ¿Cuál es el módulo de $\vec{v} + \vec{w}$?

3) Dados dos vectores ortogonales \vec{i} y \vec{j} de igual módulo.

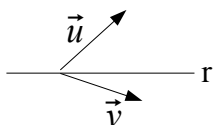
a) Construir: $\vec{w}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ $\vec{w}_2 = -2\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{w}_3 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

b) Utilizando trigonometría deduzca el ángulo entre \vec{w}_1 y \vec{w}_3

c) Siendo α el ángulo hallado verifique que $\cos(\alpha) \cdot \sqrt{26} = 5$

4) Si \vec{u} y \vec{v} son ortogonales ¿Qué condición tienen que cumplir \vec{u} y \vec{v} , para que $\vec{u} + \vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u} - \vec{v}$?

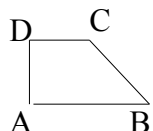
5) Dados los vectores \vec{u} y \vec{v} y la recta r



a) Construya un vector $k \cdot \vec{v}$ tal que $k \vec{v} + \vec{u}$ tenga la misma dirección que la recta r ($k \in \mathbb{R}$) .

b) Construya un vector $\alpha \vec{u}$ y un vector $\beta \vec{v}$ para que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ tenga la misma dirección que r y además $|\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}| = |2\vec{u}|$ ¿cuántos valores de α y β verifican tal condición? ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

6) Dado un trapecio rectángulo $ABCD$ según figura ($\vec{AB} = 2 \cdot \vec{DC}$ y $|\vec{AD}| = |\vec{DC}|$)



a) Escriba \vec{CB} como combinación lineal de \vec{AD} y \vec{AB} .

b) Si M es un punto medio del segmento AD escriba \vec{CM} como C.L. de \vec{CB} y \vec{AD}

7) Sean A B y C tres puntos tal que $\vec{AB} = k \vec{AC}$.

Calcular m, n y p $\in \mathbb{R}$ para que: $\vec{BA} = m \vec{AC}$ $\vec{BC} = n \vec{AB}$ $\vec{BC} = p \vec{AC}$

8) Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera. Sean P y Q tal que $\vec{BP} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ y $\vec{AQ} = 3 \vec{AD}$.

a) Verificar que: $\vec{CP} = \frac{1}{2} \vec{AB} - \vec{BC}$ y $\vec{CQ} = 2 \vec{AD} - \vec{DC}$

b) Deducir que si ABCD es un paralelogramo entonces P, Q y C están alineados.

9) Dados tres puntos A, B y C y otro punto cualquiera O del mismo plano. Probar que el extremo G del vector \vec{OG} , tal que $\vec{OG} = 1/3 (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ es el baricentro del triángulo ABC.

(Sug.: Probar que el punto G que verifica la condición es independiente del punto O elegido, después elegir O como uno de los puntos A B o C, y utilizar propiedad métrica)

10) Investiga si las siguientes expresiones son correctas y en caso positivo, menciona si el resultado es un real o un vector:

a) $\langle \vec{u}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \rangle$

b) $\vec{u} \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

c) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

d) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} \rangle \cdot \vec{u}$

11) Sea ABCD un cuadrado de lado 2. Indicar:

$\langle \vec{AB}, \vec{BC} \rangle$

$\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle$

$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle$

$\langle \vec{AB}, 2\vec{DB} \rangle$

$\langle 3\vec{AB} + \vec{AC}, 2\vec{DB} \rangle$

12) ¿Es $\vec{u} \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \vec{w}$; $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$?

13) Resuelva el ejercicio 4 utilizando producto interno.

14) Demuestre utilizando propiedades de producto escalar que si dos vectores u y v son ortogonales se cumple que $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2$.

15) Siendo $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{w}| = 4$ y $|\vec{v} - \vec{w}| = 5$. Calcular $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

(sug: utilizar convenientemente el teorema del coseno).

16) Sea AB un diámetro de una circunferencia de centro O, y P un punto cualquiera de la misma. Demuestre que el ángulo APB es recto, utilizando el producto escalar.

(sug: $\vec{PA} = \vec{PO} + \vec{OA}$ )