

Práctico N° 2

1) Hallar x, y, z para que $A = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2x+3y & 8 \\ -5x+4z & 2y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} z+4 & 8 \\ 2y-3 & x+z \end{pmatrix}$$

2) Hallar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Hallar Todas las matrices B tal que $A \cdot B = O$ y $B \cdot A = O$
(sug.: Deduzca el orden de la matriz B y asigne letras a sus incógnitas).

4) Calcular $AB - BA$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^2 y A^3 . ¿Quién será A^n ? Demostrar por I.C.

6) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^2 , A^3 y A^4 . ¿Quién será A^n ? Demostrar por I.C.

7) ¿Serán ciertas las igualdades $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ y $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$?
(sug.: pruebe con algunos ejemplos)

8) a) Enuncie la propiedad Hankeliana.

b) Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que $A \cdot B = O$

c) ¿Las matrices verifican la propiedad Hankeliana?

9) Dado el siguiente teorema:

Una matriz A de orden 2×2 conmuta con cualquier otra matriz del mismo orden si y solo si conmuta con dada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar todas las matrices de orden 2×2 que conmutan con cualquier otra.

10) Probar que para toda matriz $A_{m \times m}$ se cumple:

$$\text{i. } (A^t)^t = A \quad \text{ii. } (cA)^t = c(A^t) \quad \text{iii. } (A+B)^t = A^t + B^t$$

11)(A) Sea A una matriz de orden 2x2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Encontrar una matriz B, tal que:

a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} k a_{11} & k a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

c) $B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$

d) $B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} + a_{21} & \alpha a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}$

(B) Sea la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Se le aplican las siguientes transformaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Indicar cada una de las transformaciones aplicadas.

b) En cada paso, encontrar la matriz por la cual debemos multiplicar a cada una para obtener la siguiente.

(Si en el razonamiento realizamos: $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow I$

Encuentre B_1 tal que $B_1 \cdot A = A_1$ y así sucesivamente)

c) Deducir la matriz que al multiplicar por A obtenemos la identidad.

(Sug: utilice B_1, B_2, B_3 y B_4)

(C) Halle la matriz inversa de J:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

12) Hallar los inversos de cada una de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

13) Resolver las siguientes ecuaciones. Con A y B las del ejercicio 12

a) $AX = B$

b) $XA = B$

c) $AXA^{-1} = B$

d) $X \cdot A \cdot B = 2A + 3B$

14) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el ejercicio 12:

$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x - 2y - 6z = 3 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

15) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar las inversas de A y B.

b) Calcular $A \cdot B$ y deducir la inversa de $A \cdot B$ operando con A^{-1} y B^{-1}