Práctico Nº 11

1. Se dan las rectas r) $3x + y = 0$ y r') $x – 2y = 0$. Se consideran las rectas variables paralelas a $y = - x$; las que cortan a r y r' en R y R' respectivamente. Por R se traza la paralela a la recta $y = x$ (t). Por R' la paralela a la recta $y = 2x$ (t'). Hallar el L.G. de **I**; con $t \cap t' = \{I\}$.

2. i) Se consideran el punto A, variable sobre ox, y B de coordenadas (0,3). Hallar el lugar geométrico de P, siendo P la intersección de la mediatriz de AB con la paralela a oy por A.
 ii) Se consideran las tangentes al lugar hallado trazadas desde el origen, (t y t'). Comprobar analíticamente que son perpendiculares entre sí.

3. Dados los puntos P(1,2) y N(0,1/2). Se traza la recta r variable por N y la recta p perpendicular a r por p. Q es la intersección de p con ox. Hallar el lugar geométrico de L; siendo L la intersección de r con la paralela a oy por Q. Reconocer y dar elementos.

4. Se considera una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 – 2x + 4y + 1 = 0$; C es su centro, P un punto perteneciente a dicha circunferencia. La recta r es mediatriz de CP. Siendo A(2,0) y r' la recta paralela a r por A. Hallar el L.G. del punto I al variar P. $\{I\}=r' \cap CP$.

5. Se considera el punto variable K, sobre la recta $y = -x$.
 i) Hallar la ecuación de la circunferencia determinada por O(0,0), P(1,1) y K.
 ii) Si la perpendicular por el origen a la recta PK corta a la circunferencia en M. Hallar el Lugar geométrico de M, reconocerlo.

6. Sean dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ de centros C(0,1) y C'(0,2) que pasan por el origen; y una recta variable r por el origen que corta a las circunferencias en M y M' respectivamente. Sea r' la mediatriz de MM'.
 a) Probar que r' pasa por un punto fijo.
 b) Hallar el lugar geométrico de $r' \cap CM$.
 c) Hallar el L.G. de $r' \cap C'M'$.
 d) Reconocer y hallar elementos.

7. Dada la cfa. de centro en (0,0) y radio 2, y un punto T, variable perteneciente a la misma. Hallar el lugar geométrico de la intersección de OT con la paralela a oy trazada por C, siendo C la intersección de la tangente a la cfa. por T con el eje ox.

8. i. Sea $\mathcal{P}$ la parábola de ecuación $y = 2x^2 – x + 8$; y J un punto variable perteneciente a ella. Q y R son las proyecciones de J sobre los ejes ox y oy, respectivamente. Hallar el L.G. del punto medio de QR. Reconocer e informar elementos.
 ii. Sea ahora la recta r que pasa por Q, y por B(0,1). Hallar el L.G. de $OJ \cap r$. Reconocer.
 iii. Representar la zona del plano cuyos puntos verifican: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8 \leq 0 \\ x^2 - y^2 - 4x + 4y \leq 0 \end{cases}$

9. Sean los puntos A(-1,0) y B (0,3), las rectas *r*, *s* y *t*; tales que: *r)* $y = x$; *s)* $y = -x$; y $t \parallel oy$, variable. Siendo los puntos P y Q tales que: $r \cap t=\{P\}$, y $s \cap t = \{Q\}$.
 i) Hallar el lugar geométrico del punto I / $\{I\}= AP \cap BQ$, reconocer.
 ii) Hallar el área del triángulo POQ e indicar cuáles deben ser las coordenadas de P y Q, para que el área sea de 16 unidades; y que P pertenezca al primer cuadrante.
 iii) Se considera ahora el punto M variable sobre PQ, (P y Q hallados en ii), si *d* es la polar de M respecto al lugar geométrico hallado en i, y *e* es paralela a la recta de ecuación: $4x – 2y + 3 = 0$, por M. Hallar el lugar geométrico del punto D: $\{D\}= d \cap e$. Reconocer.

10. i) Sea la circunferencia $\mathcal{C}$ de ecuación; $\mathcal{C}$) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$, de centro C; y los puntos: A(2,-2), y B(2,2). Probar que los ángulos que determinan las rectas IA e IB, son constantes. Siendo I, un punto variable sobre $\mathcal{C}$.
ii) Siendo t una recta variable de ecuación $y = \lambda$; y r la recta tangente a la cfa., trazada desde D(-4,0), (de coeficiente angular positivo).
Hallar las coordenadas de P (en función de λ)/ $\{P\}= r\cap t$.
iii)Se considera R, la proyección de P sobre Ox, y Q:$\{Q\}= r\cap \mathcal{C}$.
Hallar el L.G. de I / $\{I\}= RQ\cap PC$. Reconocer.

11. (A) i. Halle el lugar geométrico de los puntos del plano cuya potencia a la circunferencia $\mathcal{C}$ es igual a 3; siendo $\mathcal{C}$) $x^2+y^2-2x-4y=0$. Observe que dicho lugar es una circunferencia ($\mathcal{C}$') y de elementos.
ii. Sea r una recta de ecuación $y = ax$. Considere la circunferencia $\mathcal{C}$'' tal que el eje radical entre $\mathcal{C}$' y $\mathcal{C}$'' es r, y su centro pertenece a s : s) $y = ½$.
iii. Halle el Lugar geométrico del polo de r respecto de $\mathcal{C}$'' al variar a. ($a\in\Re$). Reconocer.

(B) Represente el conjunto de puntos del plano que verifican: $\begin{cases} x^2+y^2\geq 6x \\ x\leq y^2+6 \\ y\geq x-6 \end{cases}$

12. i. Probar que las tangentes trazadas desde el punto A, intersección de la directriz con el eje de la parábola $\mathcal{P}$ de ecuación $y= ax^2$ son perpendiculares. (a>0)
ii. Halle el área del triángulo determinado por A y los puntos de tangencia.
iii. Halle la ecuación de $\mathcal{P}$ para que dicha área sea 4.

13. A) Se considera un punto P perteneciente a la recta r de ecuación $x = 1$
i) Halla la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ que es tangente a r en P y pasa por O.
ii) Siendo P variable, halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias $\mathcal{C}$. Reconocer y mencionar elementos.
B) Representa el conjunto de puntos del plano que verifican:
$$\begin{cases} x^2+y^2\geq 29 \\ 4x-y-3\leq 0 \\ y\leq x^2+1 \end{cases}$$
C) Resuelve discutiendo según λ
$$\begin{cases} (\lambda-1)x+(\lambda^2-1)y=\lambda-5 \\ \lambda x-2\lambda^2 y=\lambda-1 \end{cases}$$

14. A)Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
i) Prueba que A y B son invertibles
ii) Resuelve la ecuación $AX-B^{-1}=2A-B^2$
B) Sea $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ P el conjunto cuyos elementos son las columnas de $M+M^t$
y C el conjunto cuyos elementos son las columnas de $M-M^t$
i) Verifica que P genera $\mathbb{R}^3$ y que C es un conjunto linealmente dependiente
ii) Halla todos los vectores $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ que son ortogonales simultaneamente a los tres vectores de C.
iii)¿Cuántos vectores de la parte anterior tienen norma 2? ¿Cuáles son?

15. A) Dados los puntos A(0,4) y B(2,0)

i) Hallar la ecuación de las circunferencias $\mathcal{C}$ tal que A $\in$ $\mathcal{C}$ y B $\in$ $\mathcal{C}$.

ii)Determinar la ecuación de la tangente (t) a $\mathcal{C}$ en A.

iii) $t \cap ox = \{P\}$, r es paralela a oy por P y s es perpendicular a t por O. Halle el L.G. de I, si I : $\{I\} = r \cap s$. Reconocer

16. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

a) Hallar X / A^t.X + C = B

b) Hallar M / A^t.M = $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 8 & -7 \\ 4 & -22 \end{pmatrix}$

17. i) Resolver y discutir según el parámetro:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + (m-1)z = 2 \\ (-m-1)x + (m^2 - 2\text{m})y + (m-1)z = -2\text{m} + 6 \\ (m+1)x + m^{2y} + (-m^2 + 3\text{m} - 2)z = -5\text{m} + 7 \end{cases}$$

ii) Se considera la Cfa. ($\mathcal{C}$) que pasa por: P(0,5), E(-3,-3) y O(0,0). Sea r una recta variable por P que corta a $\mathcal{C}$ en P y K.

a) Demostrar que la mediatriz del segmento PK pasa por un punto fijo. Determinarlo.

b) L.G. del punto medio del segmento OK. Reconocer y hallar elementos.

18. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro C(2,3) tangente a Oy. Una recta variable r) y = mx corta a $\mathcal{C}$ en A y B.

i) Hallar en función de m, la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$' que pasa por A, B y D(5,2).

ii)Probar que la familia de circunferencias C' forman haz cuando m varía. Hallar coordenadas de los puntos base, y ecuación del eje radical.

iii) Sea p la polar del origen respecto de C'. Hallar la ecuación del L.G. del punto L : {L}= p$\cap$r. Reconocer.

19. Sea $\mathcal{C}$ la cfa. de ecuación $x^2 + y^2 = 16$, t es una tangente variable que interseca a los ejes Ox y Oy en P y Q respectivamente. Sea C_i la circunferencia circunscrita al triángulo OPQ y r_i el eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_i$. r_i corta a Ox y Oy en A_i y B_i respectivamente. Se pide:

i) L.G. del punto medio (M) de A_iB_i.

ii) Sea el punto T:{T} = OM$\cap t_i$ y C_j la circunferencia circunscrita al OPT. Hallar la ecuación de C_j y probar que forman haz, indicando puntos base y eje radical del mismo.

20. Sean A(3,0) y B(0,2), C la cfa. de centro B y tangente a Ox, y C' una cfa. variable tangente a Ox en A.

i) Demostrar que el eje radical (e) de C y C' pasa por un punto fijo S que se determinará.

ii) Sea r la recta determinada por los centros B y B' de C y C' y s la polar de S respecto de C'. Hallar la ecuación del L.G. del punto L:{L}=r$\cap$s. Reconocer.

iii) L.G. de I : {I}=e$\cap$s.

21. Se considera el haz de cfas. cuyos puntos base son O(0,0) y A(0,2).

i) Hallar la ecuación del haz. Hallar la cfa C del haz cuyo radio es $\sqrt{5}$, tal que su centro C tenga abscisa positiva.

ii) Determinar los puntos del eje central del haz tales que su potencia respecto de C vale –1.