

1. Se dan las rectas $r) 3x + y = 0$ y $r') x - 2y = 0$. Se consideran las rectas variables paralelas a $y = -x$; las que cortan a r y r' en R y R' respectivamente. Por R se traza la paralela a la recta $y = x$ (t). Por R' la paralela a la recta $y = 2x$ (t'). Hallar el L.G. de I ; con $t \cap t' = \{I\}$.
2. i) Se consideran el punto A , variable sobre ox , y B de coordenadas $(0,3)$. Hallar el lugar geométrico de P , siendo P la intersección de la mediatriz de AB con la paralela a oy por A .
ii) Se consideran las tangentes al lugar hallado trazadas desde el origen, (τ y τ'). Comprobar analíticamente que son perpendiculares entre sí.
3. Dados los puntos $P(1,2)$ y $N(0,1/2)$. Se traza la recta τ variable por N y la recta ρ perpendicular a τ por ρ . Q es la intersección de ρ con ox . Hallar el lugar geométrico de L ; siendo L la intersección de τ con la paralela a oy por Q . Reconocer y dar elementos.
4. Se considera una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$; C es su centro, P un punto perteneciente a dicha circunferencia. La recta τ es mediatriz de CP . Siendo $A(2,0)$ y τ' la recta paralela a τ por A . Hallar el L.G. del punto I al variar P . $\{I\} = \tau' \cap CP$.
5. Se considera el punto variable K , sobre la recta $y = -x$.
i) Hallar la ecuación de la circunferencia determinada por $O(0,0)$, $P(1,1)$ y K .
ii) Si la perpendicular por el origen a la recta PK corta a la circunferencia en M . Hallar el Lugar geométrico de M , reconocerlo.
6. Sean dos circunferencias \mathcal{C} y \mathcal{C}' de centros $C(0,1)$ y $C'(0,2)$ que pasan por el origen; y una recta variable τ por el origen que corta a las circunferencias en M y M' respectivamente. Sea τ' la mediatriz de MM' .
 - a) Probar que τ' pasa por un punto fijo.
 - b) Hallar el lugar geométrico de $\tau' \cap CM$.
 - c) Hallar el L.G. de $\tau' \cap C'M'$.
 - d) Reconocer y hallar elementos.
7. Dada la cfa. de centro en $(0,0)$ y radio 2 , y un punto T , variable perteneciente a la misma. Hallar el lugar geométrico de la intersección de OT con la paralela a oy trazada por C , siendo C la intersección de la tangente a la cfa. por T con el eje ox .
8. i. Sea \mathcal{P} la parábola de ecuación $y = 2x^2 - x + 8$; y J un punto variable perteneciente a ella. Q y R son las proyecciones de J sobre los ejes ox y oy , respectivamente. Hallar el L.G. del punto medio de QR . Reconocer e informar elementos.
ii. Sea ahora la recta τ que pasa por Q , y por $B(0,1)$. Hallar el L.G. de $OJ \cap \tau$. Reconocer.
iii. Representar la zona del plano cuyos puntos verifican:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8 \leq 0 \\ x^2 - y^2 - 4x + 4y \leq 0 \end{cases}$$
9. Sean los puntos $A(-1,0)$ y $B(0,3)$, las rectas r, s y t ; tales que: $r) y = x$; $s) y = -x$; y $t // oy$, variable. Siendo los puntos P y Q tales que: $r \cap t = \{P\}$, y $s \cap t = \{Q\}$.
 - i) Hallar el lugar geométrico del punto I / $\{I\} = AP \cap BQ$, reconocer.
 - ii) Hallar el área del triángulo POQ e indicar cuáles deben ser las coordenadas de P y Q , para que el área sea de 16 unidades; y que P pertenezca al primer cuadrante.
 - iii) Se considera ahora el punto M variable sobre PQ , (P y Q hallados en ii), si d es la polar de M respecto al lugar geométrico hallado en i, y e es paralela a la recta de ecuación: $4x - 2y + 3 = 0$, por M . Hallar el lugar geométrico del punto D : $\{D\} = d \cap e$. Reconocer.

10. i) Sea la circunferencia \mathcal{C} de ecuación; $\mathcal{C}) x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$, de centro C; y los puntos: A(2,-2), y B(2,2). Probar que los ángulos que determinan las rectas IA e IB, son constantes. Siendo I, un punto variable sobre \mathcal{C} .
- ii) Siendo t una recta variable de ecuación $y = \lambda$; y r la recta tangente a la cfa., trazada desde D(-4,0), (de coeficiente angular positivo).
Hallar las coordenadas de P (en función de λ)/ $\{P\} = r \cap t$.
- iii) Se considera R, la proyección de P sobre Ox, y Q: $\{Q\} = r \cap \mathcal{C}$.
Hallar el L.G. de I / $\{I\} = RQ \cap PC$. Reconocer.

11. (A) i. Halle el lugar geométrico de los puntos del plano cuya potencia a la circunferencia \mathcal{C} es igual a 3; siendo $\mathcal{C}) x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$. Observe que dicho lugar es una circunferencia (\mathcal{C}') y de elementos.
- ii. Sea r una recta de ecuación $y = ax$. Considere la circunferencia \mathcal{C}' tal que el eje radical entre \mathcal{C} y \mathcal{C}' es r , y su centro pertenece a r : \mathcal{C}' $y = \frac{1}{2}$.
- iii. Halle el Lugar geométrico del polo de r respecto de \mathcal{C}' al variar a . ($a \in \mathbb{R}$). Reconocer.

(B) Represente el conjunto de puntos del plano que verifican:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 6x \\ x \leq y^2 + 6 \\ y \geq x - 6 \end{cases}$$

12. i. Probar que las tangentes trazadas desde el punto A, intersección de la directriz con el eje de la parábola \mathcal{P} de ecuación $y = ax^2$ son perpendiculares. ($a > 0$)
- ii. Halle el área del triángulo determinado por A y los puntos de tangencia.
- iii. Halle la ecuación de \mathcal{P} para que dicha área sea 4.

13. A) Se considera un punto P perteneciente a la recta r de ecuación $x = 1$
- i) Halla la ecuación de la circunferencia \mathcal{C} que es tangente a r en P y pasa por O.
- ii) Siendo P variable, halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias \mathcal{C} . Reconocer y mencionar elementos.

B) Representa el conjunto de puntos del plano que verifican:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 29 \\ 4x - y - 3 \leq 0 \\ y \leq x^2 + 1 \end{cases}$$

C) Resuelve discutiendo según λ

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + (\lambda^2 - 1)y = \lambda - 5 \\ \lambda x - 2\lambda^2 y = \lambda - 1 \end{cases}$$

14. A) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

i) Prueba que A y B son invertibles

ii) Resuelve la ecuación $AX - B^{-1} = 2A - B^2$

B) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ P el conjunto cuyos elementos son las columnas de $M + M^t$

y C el conjunto cuyos elementos son las columnas de $M - M^t$

i) Verifica que P genera \mathbb{R}^3 y que C es un conjunto linealmente dependiente

ii) Halla todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que son ortogonales simultáneamente a los tres vectores de C.

iii) ¿Cuántos vectores de la parte anterior tienen norma 2? ¿Cuáles son?

15. A) Dados los puntos A(0,4) y B(2,0)
- Hallar la ecuación de las circunferencias \mathcal{C} tal que $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$.
 - Determinar la ecuación de la tangente (t) a \mathcal{C} en A.
 - $t \cap Ox = \{P\}$, r es paralela a Oy por P y s es perpendicular a t por O. Halle el L.G. de I, si $I: \{I\} = r \cap s$. Reconocer

16. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

a) Hallar X / $A^t \cdot X + C = B$

b) Hallar M / $A^t \cdot M = A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 8 & -7 \\ 4 & -22 \end{pmatrix}$

17. i) Resolver y discutir según el parámetro:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + (m-1)z = 2 \\ (-m-1)x + (m^2 - 2m)y + (m-1)z = -2m + 6 \\ (m+1)x + m^2y + (-m^2 + 3m - 2)z = -5m + 7 \end{cases}$$

- ii) Se considera la Cfa. (\mathcal{C}) que pasa por: P(0,5), E(-3,-3) y O(0,0). Sea r una recta variable por P que corta a \mathcal{C} en P y K.

- Demostrar que la mediatriz del segmento PK pasa por un punto fijo. Determinarlo.
- L.G. del punto medio del segmento OK. Reconocer y hallar elementos.

18. Sea \mathcal{C} la circunferencia de centro C(2,3) tangente a Oy. Una recta variable r) $y = mx$ corta a \mathcal{C} en A y B.

- Hallar en función de m, la ecuación de la circunferencia \mathcal{C}' que pasa por A, B y D(5,2).
- Probar que la familia de circunferencias \mathcal{C}' forman haz cuando m varía. Hallar coordenadas de los puntos base, y ecuación del eje radical.
- Sea p la polar del origen respecto de \mathcal{C}' . Hallar la ecuación del L.G. del punto L: $\{L\} = p \cap r$. Reconocer.

19. Sea \mathcal{C} la cfa. de ecuación $x^2 + y^2 = 16$, t es una tangente variable que interseca a los ejes Ox y Oy en P y Q respectivamente. Sea C_i la circunferencia circunscrita al triángulo OPQ y r_i el eje radical de \mathcal{C} y \mathcal{C}_i . r_i corta a Ox y Oy en A_i y B_i respectivamente. Se pide:

- L.G. del punto medio (M) de $A_i B_i$.
- Sea el punto T: $\{T\} = OM \cap t_i$ y C_j la circunferencia circunscrita al OPT. Hallar la ecuación de C_j y probar que forman haz, indicando puntos base y eje radical del mismo.

20. Sean A(3,0) y B(0,2), C la cfa. de centro B y tangente a Ox, y \mathcal{C}' una cfa. variable tangente a Ox en A.

- Demostrar que el eje radical (e) de C y \mathcal{C}' pasa por un punto fijo S que se determinará.
- Sea r la recta determinada por los centros B y B' de C y \mathcal{C}' y s la polar de S respecto de \mathcal{C}' . Hallar la ecuación del L.G. del punto L: $\{L\} = r \cap s$. Reconocer.
- L.G. de I: $\{I\} = e \cap s$.

21. Se considera el haz de cfás. cuyos puntos base son O(0,0) y A(0,2).

- Hallar la ecuación del haz. Hallar la cfa C del haz cuyo radio es $\sqrt{5}$, tal que su centro C tenga abscisa positiva.
- Determinar los puntos del eje central del haz tales que su potencia respecto de C vale -1.