

Ecuación general de una parábola

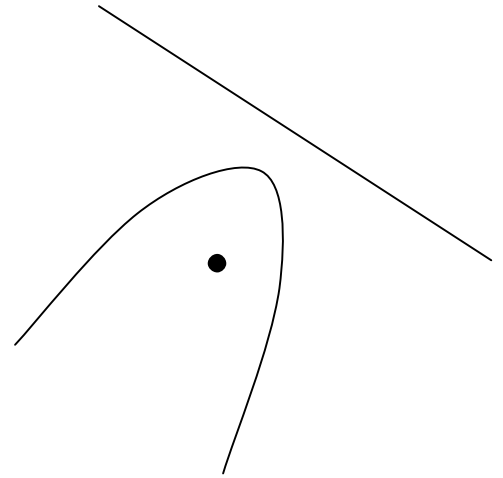
Sea $r) y = mx + n$ y $F(\alpha, \beta)$, una recta y un punto de un plano.

Hallemos la ecuación de la parábola de directriz r y foco F .

Según definición de parábola, todos los puntos $P(x, y)$ de la parábola son los que cumplen:

$$d(P, r) = d(P, F)$$

Aplicando las "formulas" de distancia:



$$\left| \frac{mx - y + n}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \right| = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} \Rightarrow$$

elevando al cuadrado ambos miembros....

$$\Rightarrow \frac{(mx - y + n)^2}{m^2 + 1} = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \Rightarrow$$

operando....

$$\Rightarrow \frac{m^2 x^2 + y^2 + n^2 - 2mxy - 2ny + 2nm x}{m^2 + 1} = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 x^2 + y^2 + n^2 - 2mxy - 2ny + 2nm x = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2)(m^2 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + m^2 y^2 + 2mxy - 2\alpha(m^2 + 1)x - 2\beta(m^2 + 1)y + 2ny - 2nm x - n^2 + (m^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2mxy + m^2 y^2 + [-2\alpha(m^2 + 1) - 2nm]x + [-2\beta(m^2 + 1) + 2n]y + (m^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - n^2 = 0$$

Observación:

La ecuación de toda parábola es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Si la ecuación la multiplicamos por un real (k), obtenemos otra equivalente, podemos afirmar entonces que la ecuación de toda parábola de foco $F(\alpha, \beta)$, y directriz $r) y = mx + n$, es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con:

$$A = k$$

$$B = 2mk$$

$$C = m^2k$$

$$D = [-2\alpha(m^2 + 1) - 2nm].k$$

$$E = [-2\beta(m^2 + 1) + 2n].k$$

$$F = [(m^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - n^2].k$$

Observamos:

$$B^2 - 4AC = (2mk)^2 - 4km^2k = 4m^2k^2 - 4m^2k^2 = 0$$

Conclusión:

Si $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, es la ecuación de una parábola $\Rightarrow B^2 - 4AC = 0$

Observación.

Conociendo la ecuación de una parábola en forma general (lo que implica conocer "A", "B", "C", "D", "E" y "F"), podemos hallar los elementos (α , β , m y n) resolviendo el sistema correspondiente.

Ejemplo:

Sea P una parábola de ecuación:

$$2x^2 + 12xy + 18y^2 - 16x - 88y + 92 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = k \\ 12 = 2mk \\ 18 = m^2k \\ -16 = [-2\alpha(m^2 + 1) - 2nm].k \\ -88 = [-2\beta(m^2 + 1) + 2n].k \\ 92 = [(m^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - n^2].k \end{array} \right. \quad \text{De donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ m = 3 \\ n = -2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(1,2) \\ d') y = 3x - 2.$$

Los demás elementos se pueden deducir a partir de éstos.