Práctico Nº 4

1) Probar que el conjunto $J=\{n\in\mathbb{N}/0+m=m\}$ es $\mathbb{N}$ (usando axiomas de Peano y definición de suma de naturales)

2) Probar que $(m.n)\in\mathbb{N},\ \forall\, m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}$

3) Demuestre utilizando el principio de inducción completa que:
   a) 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n = $n(n+1)$ $\quad\forall\, n\in\mathbb{N}$
   b) 3 + 8 + 13 + ... +(5n-2) = $\dfrac{n(5n+1)}{2}$ $\quad\forall\, n\in\mathbb{N}^*$
   c) (–5) + (– 7) + (–11) + ... +(-2n+3) = $(n+1)(3-n)$ $\quad\forall\, n\in\mathbb{N}; n\geq 4$

4) a) Halle los números reales a y b, para que la siguiente igualdad sea válida para j=1 y j=2:
   $$(-4)+(-1)+2+...+(3j-7)=aj^2+bj$$
   b) Demuestre que la igualdad es válida $\forall\, j, j\in\mathbb{N}^*$ con a y b hallados en la parte anterior
   (a=3/2 y b=-11/2)

5) Ídem con:
   $$\sum_{i=1}^{i=n}(2i+4)=an^2+bn$$

6) Probar por inducción completa:
   1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}2^i=2^0+2^1+2^2+.....+2^n=2^{n+1}-1$ $\quad\forall\, n\in\mathbb{N}$
   2. $9^0+9^1+9^2+.....+9^n=\dfrac{9^{n+1}-1}{8}$ $\quad\forall\, n\in\mathbb{N}$

7) Te proponen regalarte un millón de dólares dentro de un mes, o un peso hoy, dos mañana, cuatro al día siguiente y así, cada día el doble del anterior durante un mes. ¿Qué prefieres y por qué?

8) Observe que:
   1 = 1
   1 – 4 = - (1 + 2)
   1 – 4 + 9 = (1 + 2 + 3)
   1 – 4 + 9 – 16 = - (1 + 2 + 3 + 4)
   Induzca una ley general y demuéstrela que es cierta para todo natural mayor o igual que 1.

9) Considere la siguiente afirmación: “ $7n^2+3n+5$ es par”.
   a) Demuestre que si la afirmación es válida para $n\in\mathbb{N}$ entonces también lo es para *n+1*.
   b) Demuestre que la igualdad es falsa si n=100. ¿Cómo explica este resultado y el obtenido en el apartado “a”?

10)Considere la siguiente definición:

$$n! = \begin{cases} 1 & si \;\; n=0 \\ (n-1)!\,.\,n & si \;\; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calcular utilizando la definición 0!, 1!, 2!, 3!, 4!

b) Deduzca 15! y una fórmula para *n*!.

c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo *n* natural.

11)Considere la siguiente definición:

$$n\Delta = \begin{cases} 0 & si \;\; n=0 \\ (n-1)\Delta + 2\mathrm{n} & si \;\; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calcular utilizando la definición $0\ \Delta$, $1\ \Delta$, $2\ \Delta$, $3\ \Delta$, $4\ \Delta$

b) Deduzca $15\ \Delta$ y una fórmula para $n\ \Delta$.

c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo *n* natural.

12) Dada la siguiente definición:

$$a^{n+1} = \begin{cases} 1 & si \;\; n=0 \\ a^n . a & si \;\; n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

a) Demuestre que dado $m \in \mathbb{N}$ fijo y $a \neq 0$, se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^{n.}\, a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

13) Pruebe que $n^2 > n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N} / n \geq 3$

14) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^n - 1 = \dot{3}$ (obs: $x = \dot{3} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / x = 3\mathrm{k}$)