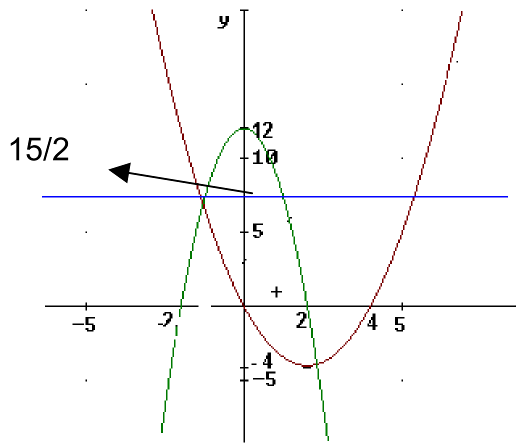
FICHA	1	NOMBRE	FUNCIONES REALES	MATEMÁTICA A
	1 P	6º I ..../..../....		Liceo:

1. i - Estudiar el signo y bosquejar el gráfico de las siguientes funciones :

$a) f : f(x) = 4x + 2$
$b) f : f(x) = -3x$
$c) f : f(x) = -3x + 4$
$d) f : f(x) = -2x^2$
$e) f : f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 4$

$f) f : f(x) = 2x^2 + 6x$
$g) f : f(x) = x^2 + 2$
$h) f : f(x) = x^2 + 2x + 3$
$i) f : f(x) = (2x-1)^2$
$j) f : f(x) = -3$
$k) f : f(x) = (x+2)^2.(2x-3)$



ii- El gráfico adjunto tiene representadas tres funciones, h, w, k, h es la función cuadrática de concavidad positiva, w es la función cuadrática de concavidad negativa y k es la función constante:

1- hallar la expresión de cada una de dichas funciones.
2- resolver: $h(x) \leq k(x)$ $w(x) > k(x)$ $h(x) \geq w(x)$
Interpretar gráficamente dichas resoluciones.

2 . a) Estudiar: dominio, signo.
b) Investigar el comportamiento de f para valores de "x" próximos a los puntos de no existencia y para $x \to \pm\infty$ sólo en los casos 1),4),5) y 8)
c) Realizar a partir de las informaciones anteriores el esbozo gráfico de f en cada caso indicado en b).
d) Resolver las inecuaciones indicadas.

1) $f : f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-6}$
Resolver : $f(x) \geq 0$

2) $f : f(x) = \dfrac{3-6x}{2x+1}$
Resolver : $f(x) < 0$

3) $f : f(x) = \dfrac{3x}{-6-2x}$
Resolver : $f(x) \geq 0$

4) $f : f(x) = \dfrac{5-2x}{9x^2+6x+1}$
Resolver : $f(x) \leq 0$

5) $f : f(x) = \dfrac{-3}{3x-2}$
Resolver : $f(x) < 0$

6) $f : f(x) = \dfrac{-2x+3}{2}$

7) $f : f(x) = \dfrac{4x^2-1}{4}$

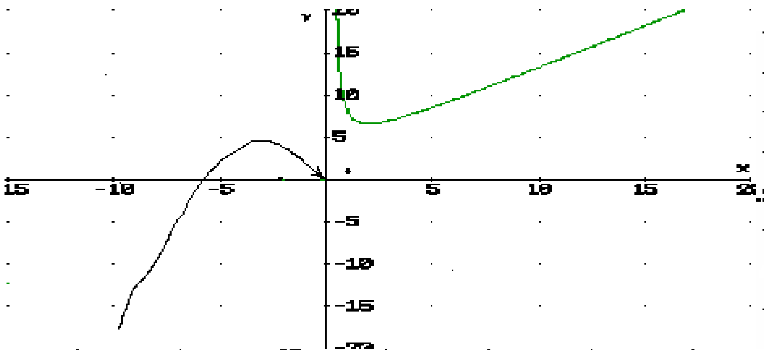
8) $f : f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x+1}$
Resolver : $f(x) \geq 0$

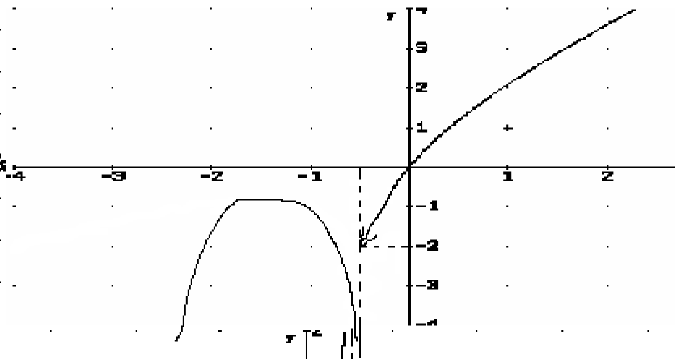
9) $f : f(x) = \dfrac{(2x+2).(x-1)^2}{(-x^2+4x+5).x}$
Resolver : $f(x) \geq 0$

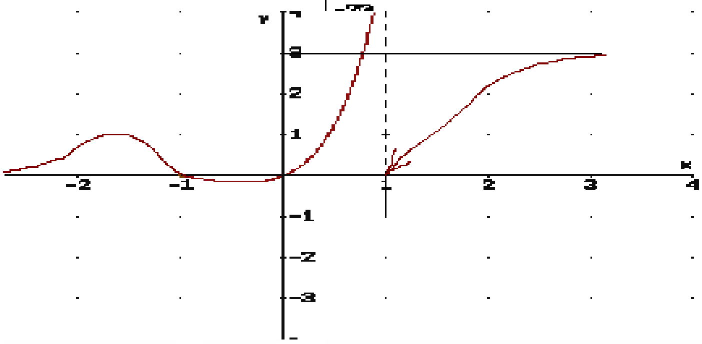
3) a) Para cada una de las siguientes funciones completar:

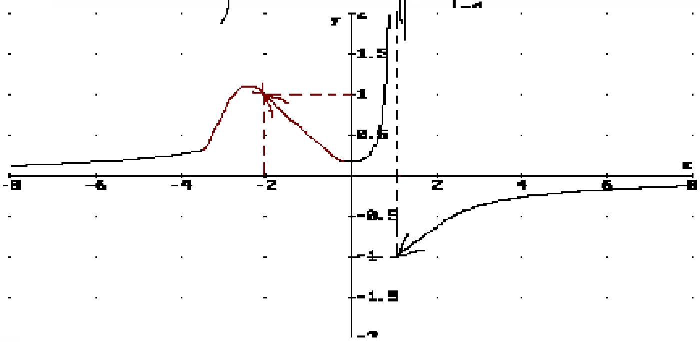
$x \to$	$f(x) \to$
$+\infty$	
$-\infty$	
a^+	
a^-	

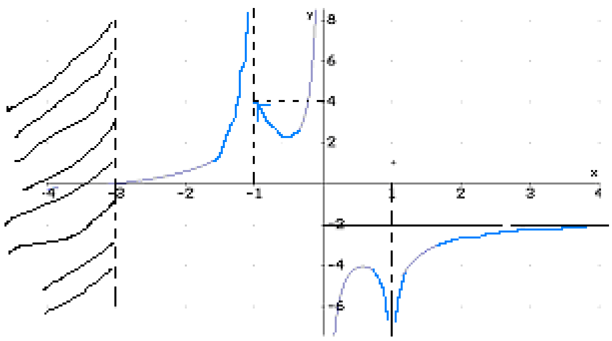
siendo x=a cada punto de no existencia de f.











b) Dadas las siguientes tablas de límites con sus respectivos signos, analizar si existe un gráfico coherente con los datos y, en ese caso hacerlo, si no, corregir el signo para poder hacer el bosquejo gráfico:

i)

$x \to$	$f(x) \to$
$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$
-1^-	0
-1^+	$-\infty$

sg + + 0 - - ∄ - - 0 + + + +

-3 -1 2

ii)

$x \to$	$f(x) \to$
$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$
0^-	1
0^+	$+\infty$

sg - - - - 0 + + + ∄ + + + +

-2 0

iii)

$x \to$	$f(x) \to$
$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$
1^-	$+\infty$
1^+	$+\infty$

sg - - 0 + + ∄ + + 0 – 0 + +

-1 1 3 4

iv)

$x \to$	$f(x) \to$
$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$
0^-	$-\infty$
0^+	-2
2^-	$+\infty$
2^+	$+\infty$

sg - - - - ∄ - - 0 - - ∄ + + +

0 1 2

v)

$x \to$	$f(x) \to$
$-\infty$	0^-
$+\infty$	0^-
-1^-	$-\infty$
-1^+	-2
0^-	$+\infty$
0^+	$-\infty$

sg - - - ∄ - - - 0 + + + ∄ - - -

-1 -1/2 0

4 Cada relaciòn escrita en la columna de la izquierda equivale a sólo una de la derecha. Buscar los pares iguales.

1	$\|x\| < 3$
2	$\|x-1\| < 3$
3	$\|3-2x\| < 1$
4	$\|1+2x\| \leq 1$
5	$\|x-1\| > 2$
6	$\|x+2\| \geq 5$
7	$\left\|5-\dfrac{1}{x}\right\| < 1$
8	$\|x-5\| < \|x+1\|$
9	$\left\|x^2-2\right\| \leq 1$
10	$\sqrt{(x+3)^2}$
11	$\|x+3\|^2$

A	$x > 3$ o $x < -1$
B	$-3 < x < 3$
C	$x > 2$
D	$(x+3)^2$
E	$-2 < x < 4$
F	$1 < x < 2$
G	$-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ o $1 \leq x \leq \sqrt{3}$
H	$x \leq -7$ o $x \geq 3$
I	$\dfrac{1}{6} < x < \dfrac{1}{4}$
J	$-1 \leq x \leq 0$
K	$\|x+3\|$

6 Realizar la RG de las siguientes funciones:

$a)\ f / f(x) = |x-3|$

$b)\ f / f(x) = \left|x^2-2x-3\right|$

$c)\ f / f(x) = \left|\dfrac{x}{x+1}\right|$

$d)\ f / f(x) = |4x-2| + 2x + 3$

$e)\ f / f(x) = \left|x^2-4\right| + 3x$

$f)\ f / f(x) = x^2 + x - \left|x^2-4\right|$

$g)\ f / f(x) = |x+3| + |x+5|$

$h)\ f / f(x) = x - 1 + \left|\dfrac{x-3}{x}\right|$

5 Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).Justificar.

$\left|2-\sqrt{5}\right| = 2-\sqrt{5}$ (.......)

$\left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow |-x| = x$ (.......)

$si.x < -3 \Rightarrow |x+3| = x+3$ (.......)

$si.x > 5 \Rightarrow |x-5| = x-5$ (.......)

$si.x > 3 \Rightarrow |-3+x| = 3-x$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow \left|x^2-4\right| = x^2-4$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2}$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow |x-1| = |x-2|$ (.......)

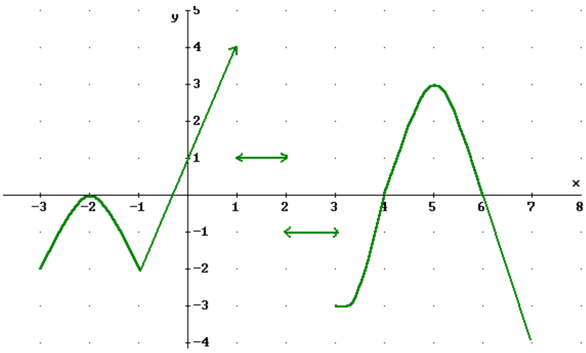
$si.x \in \Re \Rightarrow \left|(x-1).(x^2+1)\right| = (x^2+1)|x-1|$ (.......)

$si..x > -2 \Rightarrow |(x+2).(x-3)| = (x+2).|x-3|$ (.......)

$si...x \in ..R \Rightarrow \left|\dfrac{3(-x-4)}{x^2+5}\right| = \dfrac{3}{x^2+5}|x+4|$

$si...x \in ..R \Rightarrow \left|3x^2-5\right| < 3x^2+5$

7 El siguiente gráfico corresponde a la RG de una función f :



a) Indicar el dominio y el signo de f .

b) Bosquejar:

$i) -f(x)$ $\quad ii) |f(x)|$ $\quad iii)\ 2f(x)$

$iv) -3f(x)$ $\quad v) \dfrac{1}{2}f(x)$ $\quad vi)\ f(x)+2$

$vii)\ f(x)-3$ $\quad viii) \dfrac{|f(x)|+f(x)}{2}$

8 a) Resolver las siguientes inecuaciones:

1) i) $|2x-7|<1$ ii) $|-3x+5|\geq 2$ iii) $|x-a|<\delta$, con $\delta / \delta \in \Re^{+}$

2) Verificar, gráficamente, los resultados obtenidos en 1)

b) Resolver:

i) $|x-1|=5$ ii) $\left|5-\dfrac{1}{x}\right|=1$ iii) $|x^2-4x+5|=|x|$ iv) $|x^2-3x-4|-|x^2-1|=3x-1$

i) $|x^2-1|<2$ ii) $|x^2+x-4|\geq 4$ iii) $|x^2+3x|<|x^2-4x|$ iv) $\left|\dfrac{2x+3}{x}\right|\geq|4x+1|$

v) $|x^3-2x^2|<5$ vi) $|x^5-3x^2+4x-7|<-2$ vii) $\dfrac{3-x}{|x-1|}\geq\dfrac{|x-2|}{x}$ viii) $\dfrac{x^2-5|x|+6}{x^2-|x|}\leq 0$

ix) $|x^2-3x-4|-|x|-4>0$

9) a) Probar que : $\forall x,y\in R: \quad |x|-|y|\leq|x-y|$

b) ¿qué condiciones deben verificar x e y para que se cumpla la igualdad?

c) Demostrar que : i) $\forall a,b\in R: \quad \big||a|-|b|\big|\leq|a+b|$

ii) si $x\in[a,b]$ $\Rightarrow |x| \leq |a|+|b|$

iii) si x_1 , $x_2 \in[a,b]$ $\Rightarrow |x_1+x_2|\leq 2|a|+2|b|$

Función Signo:

Definiremos una nueva función, la Función Signo:

$$f/f(x)=sg(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

10) (A) Estudiar las siguientes funciones:

a) $f/f(x)=sg(x-2)$ b) $f/f(x)=sg(x^2-2)$ c) $f/f(x)=sg(x^3-5)$ d) $f/f(x)=(x^2-4x).sg(6-3x)$

e) $g/g(x)=sg(f(x))$, siendo f la función representada en el ejercicio **7**.

f) $f/f(x)=2x-3|x-1|+sg(x)$ g) $f/f(x)=x+E(x)$

(B) Demostrar que

$$\boxed{|x|=x.(sg(x))}$$

11) Indicar si cada uno de los siguientes conjuntos tienen cotas,extremos, máximo y mínimo.

$$A=\{x\in R/-2\le x\le 3\}\quad B=\{x\in R/(x+1)(x-2)(x-4)^2\le 0\}\quad C=\left\{x\in R/x>\frac{1}{x}\right\}$$

$$D=\left\{x\in R/x=\frac{1}{n},n\in N^*\right\}\ E=\left\{x\in R/x=1-\frac{1}{n},n\in N^*\right\}\ F=\left\{x\in R/x=\left(1-\frac{1}{n}\right)(-1)^n,n\in N^*\right\}$$

$$G=\left\{x\in R/x=\frac{3n+4}{5n-2},n\in N^*\right\}\quad H=\left\{x\in R/x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},n\in N^*\right\}$$

12) a) Sean $A\subset R, B\subset R,\text{tales que } a=\overline{\text{ext}}(A),\ \ b=\overline{\text{ext}}(B)$.

Se define además : A+B = $\{z\in R/z=x+y,x\in A,y\in B\}$.

Probar que : $\overline{\text{ext}}(A+B)=a+b$

b) $A\subset R, B\subset R, A\ne\phi, B\ne\phi$ tales que $\forall x\in A\ \forall y\in B$ se verifica $x\le y$

i) Probarque $\exists\alpha\in R/\alpha=\overline{\text{ext}}(A)$ y que $\exists\beta\in R/\beta=\overline{\text{ext}}(B)$
ii) Demostrar que $\alpha\le\beta$

13) Sea $A\subset R$, tal que $2=\overline{\text{ext}}(A)$. Investigar si las siguientes proposiciones son VoF. Justificar.

a) si $x\in A\Rightarrow x\le 2$ b)si $x\in R, x\le 2\Rightarrow x\in A$ c) 5 es $\overline{\text{cot}}(A)$ d) $\frac{21}{11}$ es $\overline{\text{cot}}(A)$

e) $\exists x_0\in A/x_0<\frac{199}{100}$ f) Sea $B=\{y\in R/y=-x;\forall x\in A\}\ \Rightarrow\ \underline{\text{ext}}(B)=-2$

g) Si $0\notin A, C=\left\{y\in R/y=\frac{1}{x}\quad\forall x\in A\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\text{ext}}(C)=\frac{1}{2}$

h) Si $A\subset R^+$ y $C=\left\{y\in R/y=\frac{1}{x}\quad\forall x\in A\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\text{ext}}(C)=\frac{1}{2}$

14) Estudiar: dominio, signo y representación gráfica de $\begin{array}{l} f/f(x)=\sqrt{x}\\ g/g(x)=\sqrt[3]{x}\end{array}$,se sugiere construir una tabla de valores.

15) Estudiar domino, signo y esbozo gráfico de las siguientes funciones:

$a) f\ /\ f(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad b) f\ /\ f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 25}$ $\quad c) f\ /\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x-3}}$ $\quad d)\ f\ /\ f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x+2}}$

$e) f\ /\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 5}}$ $\quad f)\ f\ /\ f(x) = x.\sqrt{x+2}$

$g) f\ /\ f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+1}}$ $\quad h)\ f\ /\ f(x) = 2x - \sqrt{5x-1}$ $\quad i)\ f\ /\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x+2}$

$j) f\ /\ f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1}$

16) Estudiar dominio, signo y esbozo gráfico de las siguientes funciones:

1) $\mathrm{f\ /\ f(x)} = \begin{cases} \mathrm{x} & \text{si } \ x \le 1 \\ 2 - \mathrm{x} & \text{si } \ 1 < x \le 3 \\ \mathrm{x}^2 - 9 & \text{si } \ x > 3 \end{cases}$

2) $f\ /\ f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } \ x < o \\ 1 & \text{si } \ 0 \le x \le 2 \\ 2x - 3 & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$

3) $f\ /\ f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } \ x < 1 \\ \sqrt{\mathrm{x}} & \text{si } \ 1 \le x \le 3 \\ 4 - x^2 & \text{si } \ x > 3 \end{cases}$

Definición

- dada $f : A \mapsto B$ **biyectiva** , diremos que $f^{-1} : B \mapsto A$ es la función inversa de f si:

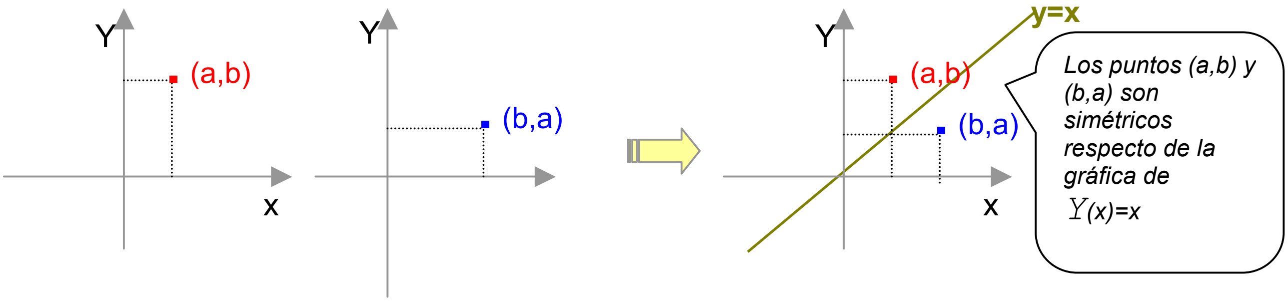
$$\mathrm{x} = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}) \Leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$$

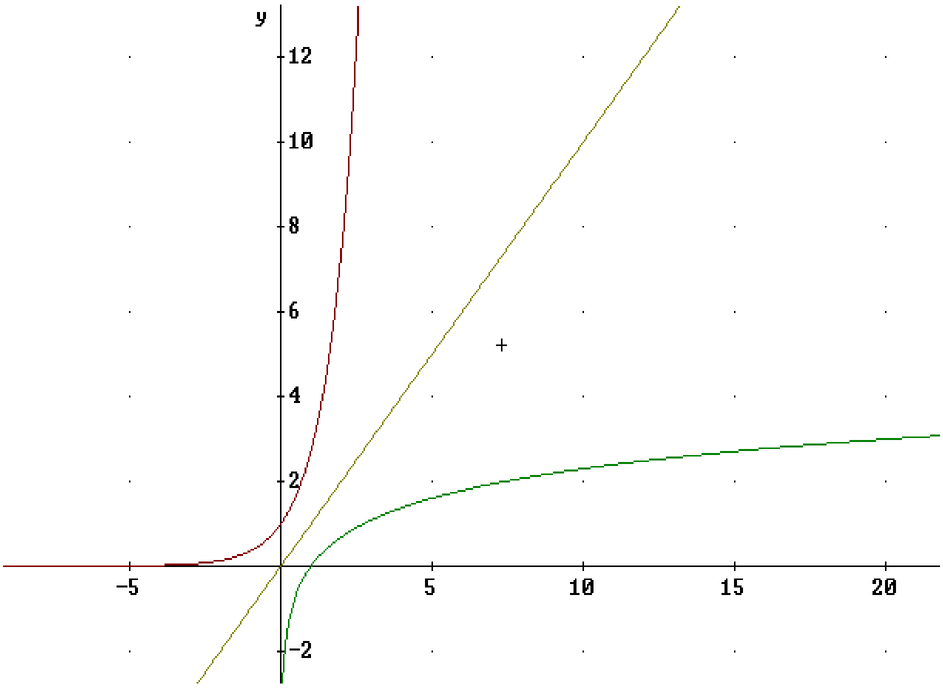
Obsérvese que:

- para que la función f^{-1} esté definida f debe ser una función biyectiva.
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $\forall x / x \in A$ es decir $f^{-1} \circ f = Y, Y$ es la función identidad, $Y(x) = x$ y su representación gráfica es la recta $y = x$.
- $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \quad \forall y / y \in B$

Las gráficas de f y f^{-1} están tan íntimamente relacionadas que es posible utilizar la gráfica de f para obtener la gráfica de f^{-1} .

☞ Puesto que la gráfica de f^{-1} consiste en todos los pares (b,a) tales que (a,b) pertenecen a la gráfica de f, **obtenemos la gráfica de f^{-1} simetrizando la gráfica de f respecto a la recta y=x**





Observar que ...

♦ Al obtener dos veces la simétrica respecto de la recta y=x volvemos al punto de partida, esto significa que $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$, con lo que concluimos que f^{-1} es también una función biyectiva.

♦ f^{-1}***(b)*** es el único real ***a*** tal que f ***(a)=b***.

Por ejemplo: si $f(x)=x^3$, tenemos entonces, $f^{-1}(b)$ es el único real a tal que $a^3=b$ y éste número es por definición $\sqrt[3]{b}$.

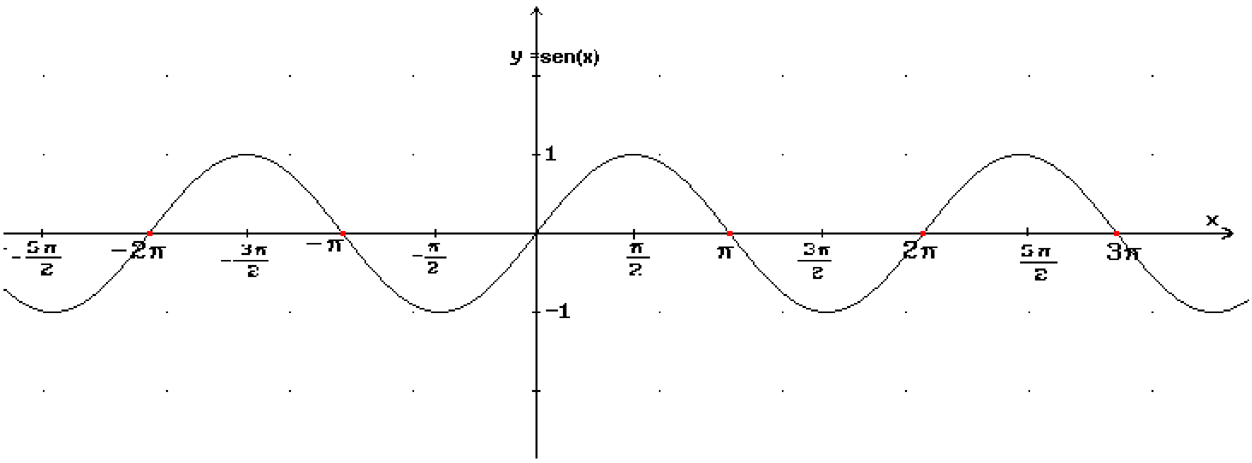
APLICACIONES

➾ Sea *f:f(x)*= $\begin{cases} x \text{ si } x \neq 3 \text{ y } x \neq 5 \\ 3 \text{ si } x = 5 \\ 5 \text{ si } x = 3 \end{cases}$ realizar la RG de f. Determinar la inversa de f, justificar que f = f $^{-1}$ (f involutiva)

➾ Sea $f:\Re \rightarrow \Re / f(x) = x^2$ indicar en qué condiciones de dominio es posible hallar f^{-1}, hallar f^{-1} y realizar su RG.

☞ *es conveniente recordar que la notación $\sqrt{a}$,cuando a es un número ≥ 0, designa al único número ≥ 0 cuyo cuadrado es a, mientras que el número negativo cuyo cuadrado es a se designa -$\sqrt{a}$, por ello al resolver la ecuación x^2=a, con a≥0, escribimos x=± $\sqrt{a}$*

13 Dada la siguiente función por su RG, determinar dominio y codominio para que sea biyectiva. En este caso definir y graficar su función inversa.



Repetir el ejercicio anterior con las funciones:

$$f:\Re \mapsto \Re / f(x) = \cos x$$

$$g:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \mapsto \Re / g(x) = \text{tg}x$$