

10-1	2	NOMBRE	FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA TRANSFORMACIONES ABACOS Prof : Sergio Weinberger	MATEMÁTICA A
	1 P	6º I 2008		Liceo: N°3 NOCT.

1) Resolver :

a) $144^x = 2\sqrt{3}$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-2}$ c) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x = 16$
d) $2^{3x} - 8 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 32 = 0$

2) Resolver :

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1}$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+x+4}$

El número e

"El número **e** que suele presentarse como el límite de la sucesión (a_n) ; $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ con $n \in \mathcal{N}$, cuando "n tiende a infinito", es uno de los números más importantes de las matemáticas.

$e \approx 2,718281828\dots$

El número e es el factorial de un número:

¿Quieres calcular el valor del enorme **87!**? Resulta, pues que aproximadamente $87! \approx \sqrt{2\pi} \sqrt{87} \cdot 87^{87} \cdot e^{-87}$.

En general $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ y la aproximación es tanto mejor cuanto mayor es el valor de n.

El número e y el cable eléctrico:

Observa la curva que forma un cable de tendido eléctrico entre dos postes consecutivo. Parece un arco de parábola, pero no lo es. Su ecuación viene determinada por la función $f : f(x) = e^x + e^{-x}$, esta curva recibe el nombre catenaria.

Extraído de Matemática 2 - M.Guzmán, J.Cólera

3). Resolver :

i) $e^{x+2} < 1$ ii) $e^{|x+2|} > 2$ iii) $e^{2 \cdot (x+2)} - e^{3 \cdot (x+3)} = 0$

iv) $e^{2x} - 4 \cdot e^x < -3$ v) $e^{\frac{2}{x-1}} - 3 \cdot e^{\frac{1}{x-1}} + 2 = 0$

4) Estudiar el dominio, signo y gráfica de

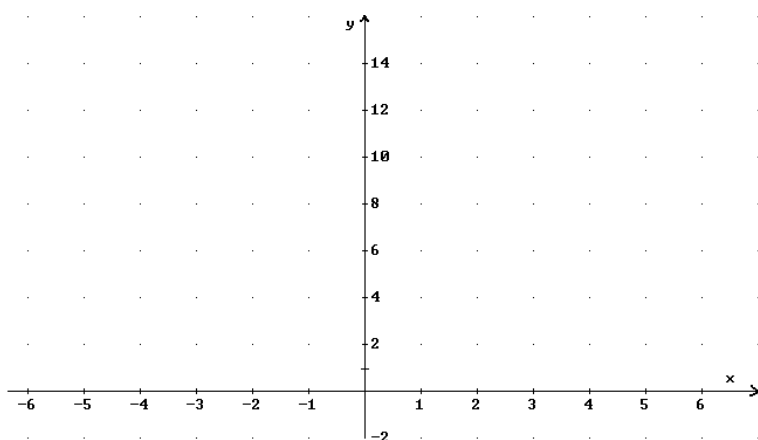
$f / f(x) = e^x$.

En general:

$\mathcal{D}(f) = \dots\dots\dots$

$sg(f) \longrightarrow$

$f / f(x) = e^{u(x)}$



$\mathcal{D}(f) = \dots\dots\dots$

$sg(f) \longrightarrow$

$u(x) \rightarrow \dots$	$e^{u(x)} \rightarrow \dots\dots\dots$
0	
$+\infty$	
$-\infty$	
1	

5) Estudiar dominio, signo y bosquejo gráfico (teniendo en cuenta los límites dados en la página 7)

a) $f / f(x) = e^{\frac{x-1}{x+2}}$

b) $f / f(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot e^{\frac{x+2}{x}}$

c) $f / f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

d) $f / f(x) = e^{4x-1} \cdot \sqrt{x+2}$

e) $f / f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \cdot e^{\frac{1}{x-3}}$

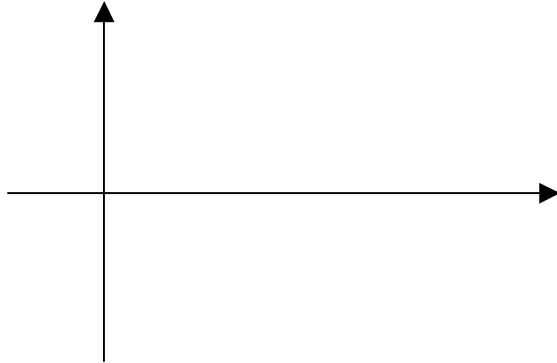
6) a) Sea $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Probar : i) $\text{sig}(a^x - 1) = \text{sig}(x)$ ii) $\text{sig}(a^x - a^y) = \text{sig}(x - y)$

b) Investigar relaciones similares a las de a) en el caso $0 < a < 1$

c) Resolver : i) $2^{x+2} - 1 \leq 0$ ii) $\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2x+3}{x}} - \frac{1}{e^2}}{5^{x+2} - 1} \leq 0$ iii) $\frac{e^{2x} + e^x - 6}{e^x - 1} > 0$

7) Estudiar el dominio, signo y gráfica de $f / f(x) = Lx$.

$\mathcal{D}(Lx) = \dots\dots\dots$



$sg(Lx)$ \longrightarrow compara con:

$sg(x-1)$ \longrightarrow

$$sg(Lx) = sig\dots\dots\dots$$

entonces:
sí $x \neq 0$

En general:

$$f / f(x) = L(u(x))$$

$\mathcal{D}(L(u(x))) = \dots\dots\dots$

$sg(L(u(x))) = sig\dots\dots\dots$
con la condición: $u(x) \dots 0$

$u(x) \rightarrow \dots\dots\dots$	$L(u(x)) \rightarrow \dots\dots\dots$
0	
0^+	
1	
$-\infty$	
$+\infty$	

8) Analizar la validez de las siguientes fórmulas:

$$L(e^x) = x$$

$$e^{Lx} = x$$

si $x > 0$

9) Resolver y verificar gráficamente.

i) $Lx = k \quad k \in \mathfrak{R}$

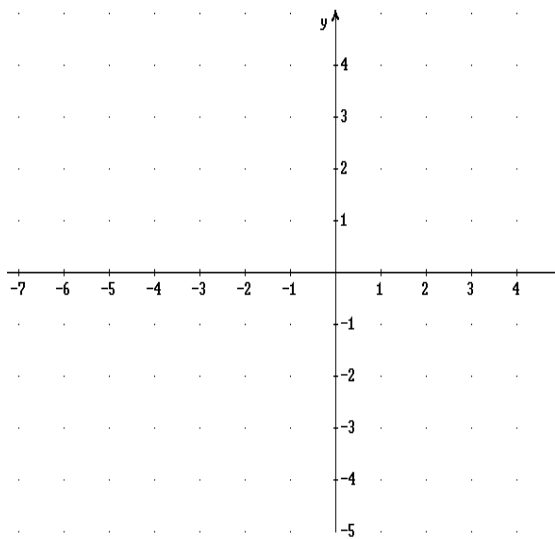
ii) $e^x = k \quad k \in \mathfrak{R}$

iii) $L^2(x-1) - L(x-1) = 6$

iv) $L|2x-3| < 2$

10) Repite el ejercicio 7, pero ahora considera:

$$f / f(x) = L|x|$$



$$\triangleright (L|x|) = \dots\dots\dots$$

$$\text{sg}(L|x|) \longrightarrow$$

compara con:

$$\text{sg}(x-1)(x+1) \longrightarrow$$

Si $x \neq 0$:

$$\text{sg}(L|x|) = \text{sg} \dots\dots\dots$$

En general, para:

$$f / f(x) = L|u(x)|$$

DOMINIO:

SIGNO :

11) Estudiar dominio, signo y esbozo gráfico de las siguientes funciones(ver limites en pag7)

a) $f / f(x) = L(x+2)$

b) $f / f(x) = L\left(\frac{x+1}{x}\right)$

c) $f / f(x) = L\left(\frac{3x-1}{x}\right)$

d) $f / f(x) = x.L|x-3|$

e) $f / f(x) = \frac{2x+5}{x+2}.L|x-2|$

f) $f / f(x) = \sqrt{x^2-1}.L(x+4)$

g) $f : f(x) = \frac{x^2}{x+3} L \left| \frac{2x-4}{x+1} \right|$

12) Resolver :

i) $Lx = k \quad k \in \mathfrak{R}$ ii) $e^x = k \quad k \in \mathfrak{R}$ iii) $L^2(x-1) - L(x-1) = 6$

iv) $L|2x-3| < 2$ v) $\frac{(L|x|+4)(L|x|+1/2)}{L|x|} \geq 0$

13) a) $x, y \in \mathbb{R}^*$ con $x^2 \neq y^2$, demostrar que :

$$L|x+y| + L|x| \leq L|x-y| + L|y| \Leftrightarrow x^2 + 2xy - y^2 \leq 0$$

b) Resolver en \mathbb{R} : $L|3x+5| + L|x+1| \leq L|x+3| + L|2x+4|$

14) a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$, probar que : $e^{|x+y|} \leq e^{|x|-|y|} \Leftrightarrow y(x+y) \leq 0$

b) Resolver : $e^{|x^2-2x-3|} \leq e^{|x^2+x-3|-|x|}$

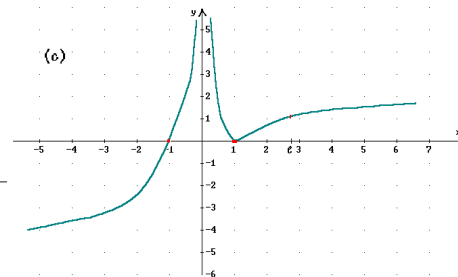
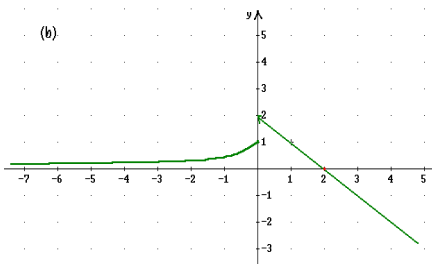
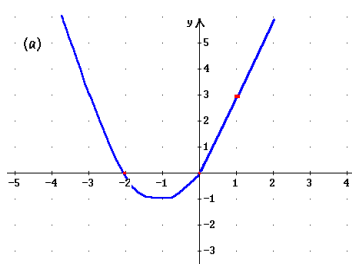
15) TRANSFORMACIONES GRÁFICAS (investigar con ejemplos y tener en cuenta el ej.7 de la ficha 1)

- ✍ Si a una función le hacemos la transformación " $f(x)$ por $f(x) + k$ " se produce una traslación en dirección..... y sentido hacia: $\begin{cases} \dots\dots\dots \text{si } k > 0 \\ \dots\dots\dots \text{si } k < 0 \end{cases}$
- ✍ Si a una función le hacemos la transformación " $f(x)$ por $f(x+k)$ " se produce una traslación en dirección..... y sentido hacia: $\begin{cases} \dots\dots\dots \text{si } k > 0 \\ \dots\dots\dots \text{si } k < 0 \end{cases}$
- ✍ Si a una función le hacemos la transformación " $f(x)$ por $-f(x)$ " se produce una simetría respecto del
- ✍ Si a una función le hacemos la transformación " $f(x)$ por $f(-x)$ " se produce una simetría respecto del
- ✍ Si a una función le hacemos la transformación " $f(x)$ por $|f(x)|$ " se produce.....
- ✍ Si a una función le hacemos la transformación " $f(x)$ por $f(|x|)$ " se produce....

16 Graficar directamente, deducir de las gráficas los ceros y el signo de cada función. Si los ceros no surgen directamente, se pueden calcular aparte, resolviendo la ecuación: $f(x) = 0$.

- | | | | |
|--|--------------------------------|---|---------------------------------------|
| 1) $f / f(x) = L(x+1)$ | 2) $f / f(x) = L x-3 $ | 3) $f / f(x) = e^x + 2$ | 4) $f / f(x) = e^{x-2}$ |
| 5) $f / f(x) = Lx+1$ | 6) $f / f(x) = e^{x+1} + 2$ | 7) $f / f(x) = x-3 - 2$ | 8) $f / f(x) = L x - 2$ |
| 9) $f / f(x) = e^{x+2} - 3$ | 10) $f / f(x) = e^{-x}$ | 11) $f / f(x) = -Lx$ | 12) $f / f(x) = e^{ x }$ |
| 13) $f / f(x) = L(2-x)$ | 14) $f / f(x) = e^{ x+1 } - 2$ | 15) $f / f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ | 16) $f / f(x) = \cos x - \frac{1}{2}$ |
| 17) $f / f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ | | | |

17 Definir funciones cuya representación gráfica sea la que se indica en cada caso:



18 Método de **ábacos** para el estudio del signo.

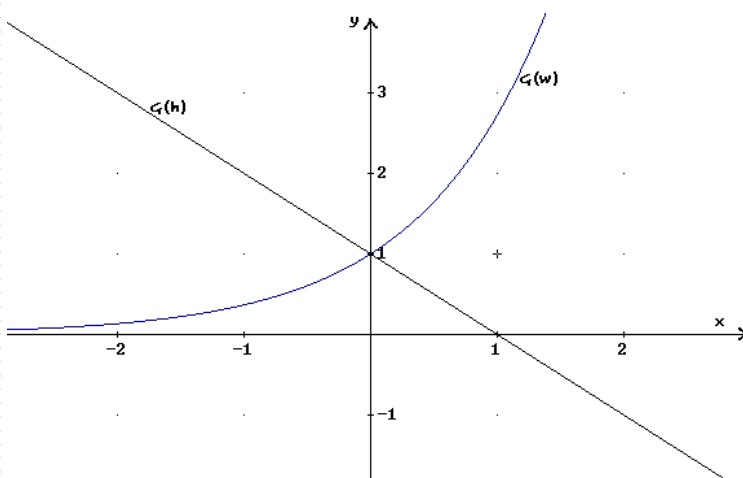
Sea la función $f / f(x) = e^x + x - 1$, le estudiaremos ceros y signos:

✍ CEROS:

para hallar las raíces, resolvemos la ecuación: $e^x + x - 1 = 0$ (A) \Leftrightarrow

$$\underbrace{e^x}_{w(x)} - \underbrace{(-x+1)}_{h(x)} = 0 \quad (B)$$

gráficamente:



¿Para qué valor de x se cumple $w(x) = h(x)$? Ese valor $x=0$ es raíz de la ecuación (B) y por lo tanto de su equivalente (A), dicho valor es por lo tanto cero de la función f , mirando las representaciones gráficas, deducimos que es la única raíz de f .

En este caso el valor de x en que se produce el corte de las gráficas se descubre inmediatamente, si esto no fuese así, podríamos elaborar una tabla de valores para $w(x)$ y $h(x)$ y con aproximaciones sucesivas, obtendríamos la raíz, con el error que se desee.

✍ SIGNO:

Observamos que para valores de

• $x > 0$, $w(x) > h(x)$ y entonces: $f(x) = w(x) - h(x)$ es

• $x < 0$, $w(x) < h(x)$ y entonces: $f(x) = w(x) - h(x)$ es Entonces

sg ($f(x)$): \longrightarrow

19) Estudiar dominio, ceros y signo de las siguientes funciones:

- 1) $f / f(x) = Lx + x - 1$ 2) $f / f(x) = Lx - x + 2$ 3) $f / f(x) = e^x - Lx$ 4) $f / f(x) = |x + 3| - e^x$
 5) $f / f(x) = L|x - 1| - x$ 6) $f / f(x) = \text{sen}x - \cos x$

ANEXO:

Ejercicio 5, tablas de límites:

a)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
$\pm \infty$	e
-2^-	$+\infty$
-2^+	0

b)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
$\pm \infty$	$\pm \infty$
0^-	0
0^+	$+\infty$

c)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
$\pm \infty$	$\pm \infty$
0^-	0
0^+	$+\infty$
1^-	$+\infty$
1^+	$-\infty$

d)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
$+\infty$	$+\infty$

e)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
-----------------	--------------------

Ejercicio 11, tablas de límites :

a)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
-2^+	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$
$\pm \infty$	

b)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
-1^-	$-\infty$
0^+	$+\infty$
$\pm \infty$	0

c)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
0^\pm	$+\infty$
$(\frac{1}{3})^\pm$	$-\infty$
$\pm \infty$	$L3$

d)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
3^\pm	$-\infty$
$\pm \infty$	$+\infty$

e)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
-2^\pm	$\pm \infty$
2^\pm	$-\infty$
$\pm \infty$	$+\infty$

f)

$x \rightarrow$	$f(x) \rightarrow$
-4^+	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$