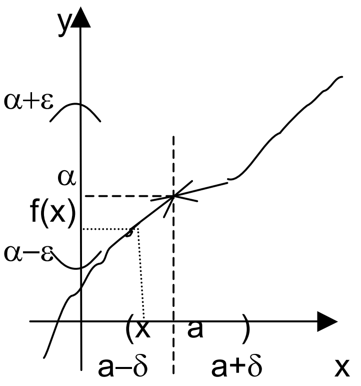
6toMat"A" -FICHA Nº4- DEF. y CÁLCULO DE LÍMITES
Síntesis Teórico-Práctica. 2007 Prof. Sergio Weinberger-

DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO:

$$\text{lím}_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall E(\alpha,\varepsilon)\ \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(\alpha,\varepsilon)$$



Es decir que ,dado un entorno cualquiera de centro "α", existe otro de centro "a" cuyas imágenes "caen" en el entorno de centro α.

<u>El entorno de centro "a" es reducido</u> con lo cual la existencia o no de f(a) es independiente de que el límite para x→a exista o no.

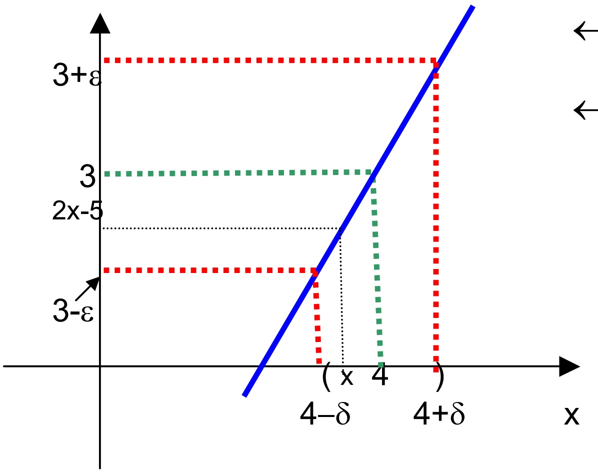
"δ", radio del entorno de centro "a", dependerá de "ε" y de la función f.

OBSERVACIÓN: $f(x) \in E(\alpha,\varepsilon) \Leftrightarrow \alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$

Ejemplo : Demostremos, aplicando la definición, que : $\text{lím}_{x\to 4}(2x-5) = 3$

De acuerdo a la definición, esto será cierto ⇔

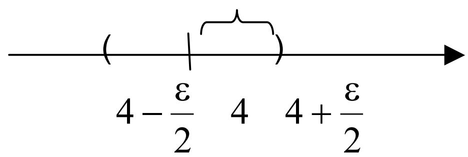
$$\forall E(3,\varepsilon)\ \exists E^*(4,\delta) / \forall x \in E^*(4,\delta) \Rightarrow 3 - \varepsilon < 2x - 5 < 3 + \varepsilon$$



$$\xleftrightarrow{\text{monot.,sumo5}} 8 - \varepsilon < 2x < 8 + \varepsilon$$

$$\xleftrightarrow{\text{monot.,}:2} 4 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta = \varepsilon / 2$$



$$\Rightarrow \begin{array}{l} \exists E^*(4,\delta) / \forall x \in E^*(4,\delta) \Rightarrow 3 - \varepsilon < 2x - 5 < 3 + \varepsilon \\ \text{siendo } \delta = \varepsilon / 2 \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{por.def.lím.finito}} \text{lím}_{x\to 4}(2x-5) = 3$ que es lo que queríamos demostrar.

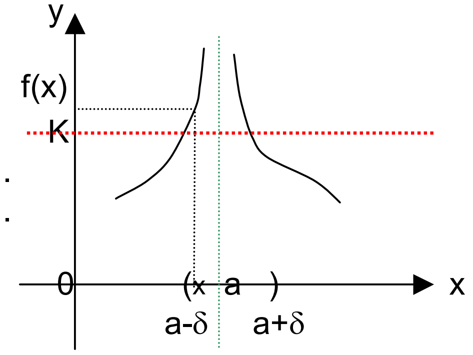
EJERCICIO 1 : Demostrar que : a) $\text{lím}_{x\to 3}(-x+5) = 2$

b) $\text{lím}_{x\to a}(mx+p) = ma+p$

LIMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO:

DEFINICIONES:

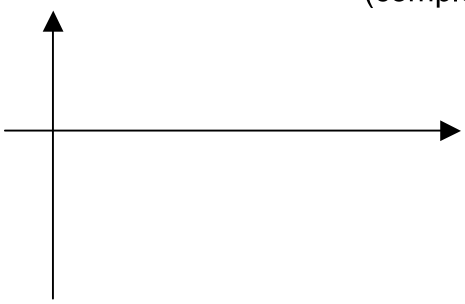
1) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K > 0 \ \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) > K$



Es decir, f(x) en este caso no está acotada superiormente en un $E^*(a,\delta)$, alcanza valores tan “grandes” como se quiera, tomando el δ adecuadamente.
Dicho δ en este caso dependerá de K y de f.

2) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$ ....

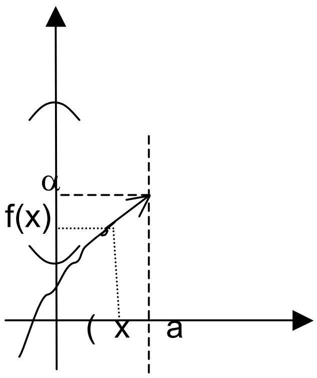
(completar definición y hacer una ilustración gráfica)



LÍMITES LATERALES:

Cualquiera de las definiciones anteriores pueden restringirse a semientornos con lo cual tendríamos la definición de un límite lateral, por ejemplo:

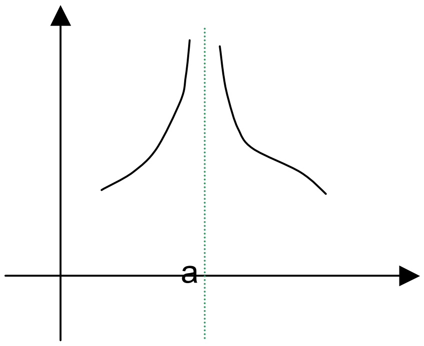
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall E(\alpha,\varepsilon) \ \exists E^*_-(a,\delta) / \forall x \in E^*_-(a,\delta) \Rightarrow \ f(x) \in E(\alpha,\varepsilon)$$

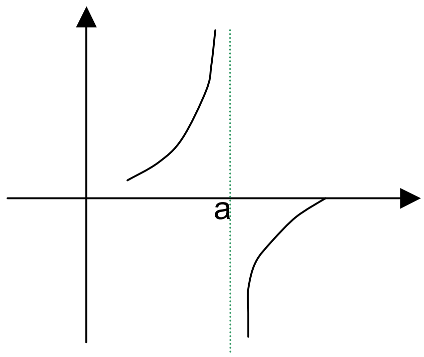


INFINITO “SIN SIGNO”

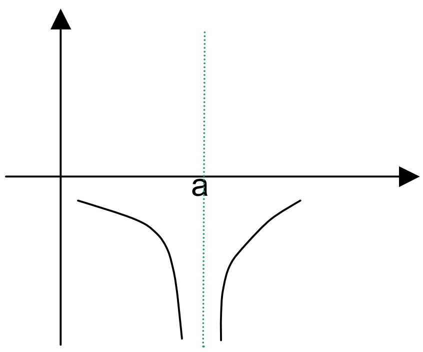
DEF:

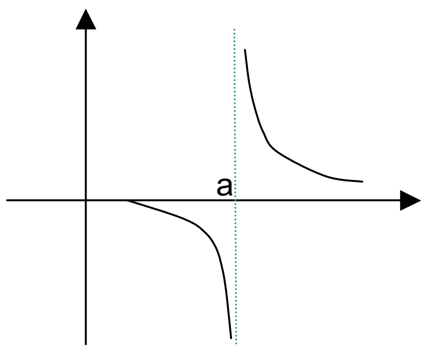
$$\text{lím}_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{lím}_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ o } +\infty \quad \text{y} \quad \text{lím}_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ o } +\infty$$





En cualquiera de estos cuatro casos se está en condiciones de la definición.





CNyS DE EXISTENCIA DE LÍMITE FINITO

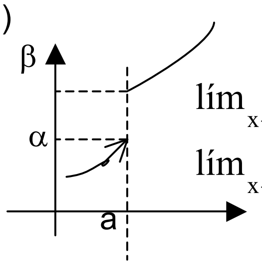
De las definiciones anteriores surge:

$$\text{lím}_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \quad \text{lím}_{x\to a^{\pm}} f(x) = \alpha$$

Esta condición y la definición de límite infinito nos permite analizar la existencia de un límite para $x\to a$.

EXISTENCIA DE LÍMITES-EJEMPLOS:

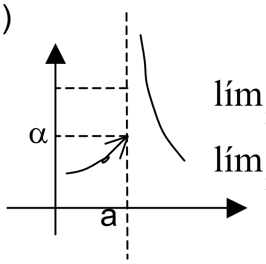
1)



En este caso :

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím}_{x\to a^-} f(x)=\alpha \\ \text{lím}_{x\to a^+} f(x)=\beta\neq\alpha \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{def.lím.}\infty]{\text{CNyS}\ \exists\ \text{lím.finito}} \nexists\,\text{lím}_{x\to a} f(x)$$

2)



En este caso :

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím}_{x\to a^-} f(x)=\alpha \\ \text{lím}_{x\to a^+} f(x)=+\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{def.lím.}\infty]{\text{CNyS}\ \exists\ \text{lím.finito}} \nexists\,\text{lím}_{x\to a} f(x)$$

TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE FINITO

"Si una función tiene límite finito para $x\to a$, éste es único".

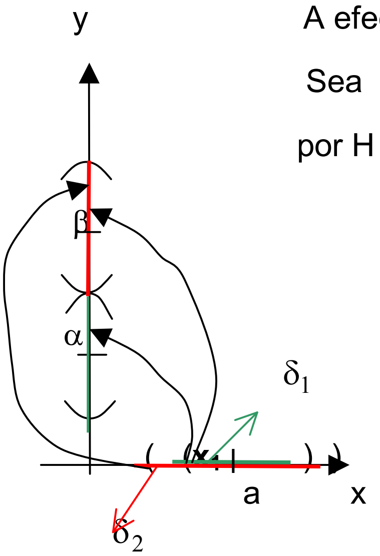
H $\exists \text{lím}_{x\to a} f(x)=\alpha\in\Re$ T α es único $\text{lím}_{x\to a} f(x)$

<u>Demostración:</u>

Supondremos por absurdo que, además de α,
HA) $\exists\beta\in\Re$ que también es $\text{lím}_{x\to a} f(x)$
(hipótesis de absurdo)
A efectos de la demostración, supondremos que $\beta>\alpha$

Sea $\varepsilon=\dfrac{\alpha-\beta}{2}>0$ un radio de entorno de centro α

por H y def. de lím :



$$\exists E^*(a,\delta_1)/\forall x\in\exists E^*(a,\delta_1):\alpha-\frac{\beta-\alpha}{2}<f(x)<\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\text{y efectuando operaciones}:\quad \frac{3\alpha-\beta}{2}<f(x)<\frac{\alpha+\beta}{2}$$

por hipótesis de absurdo :

$$\exists E^*(a,\delta_2)/\forall x\in\exists E^*(a,\delta_2):\beta-\frac{\beta-\alpha}{2}<f(x)<\beta+\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\text{y efectuando operaciones}:\quad \frac{\alpha+\beta}{2}<f(x)<\frac{3\beta-\alpha}{2}$$

por lo tanto si tomamos un $x_1 \in E^*(a,\delta_1) \cap E^*(a,\delta_2)$, deberá cumplirse:

$\frac{\alpha+\beta}{2} < f(x_1) < \frac{\alpha+\beta}{2}$ lo cual es absurdo.

Este partió de suponer la existencia de otro límite, ademas de α, (para $x \to a$)

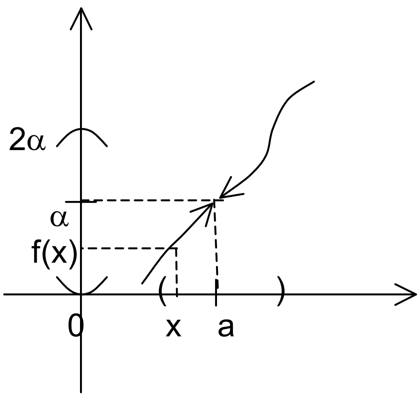
De manera que esto no es posible y α es el único límite para $x \to a$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE SIGNO.

"Si una función tiene límite finito positivo para x→a, existe un entorno reducido de centro a en el cual f(x) es también positiva"

si $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) > 0$

Demostración:



Dado $\varepsilon = \alpha > 0$, por hipótesis y def. de límite :

$$\exists E^*(a,\delta) / \forall x \in \exists E^*(a,\delta) : \alpha - \alpha < f(x) < \alpha + \alpha$$
$$\text{o sea} \quad 0 < f(x) < 2\alpha$$

Ejercicio 2 :

a) Enunciar y demostrar el teorema de conservación de signo para α<0

b) Demostrar que si :

$\lim_{x \to a} f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) > 3$

OPERACIONES CON LÍMITES:

SUMA

f(x) ↓	g(x) ↓	f(x)+g(x) ↓
α	β	$\alpha+\beta$
$+\infty$	β	$+\infty$
$-\infty$	β	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?

PRODUCTO

f(x) ↓	g(x) ↓	f(x).g(x) ↓
α	β	$\alpha.\beta$
∞	$\beta\neq0$	∞
∞	∞	∞
∞	0	?

COCIENTE

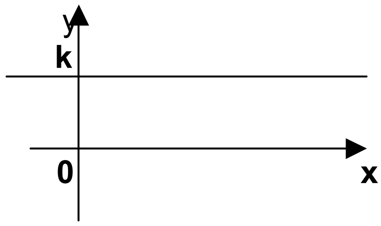
f(x) ↓	g(x) ↓	f(x)/g(x) ↓
α	$\beta\neq0$	α/β
∞	β	∞
α	∞	0
$\alpha\neq0$	0	∞
∞	∞	?
0	0	?

"INDETERMINACIONES" : "$+\infty-\infty$" "$\infty.0$" "∞/∞" "$0/0$"

LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

1) LÍMITES DE LA FUNCIÓN CONSTANTE:
Sea f : f (x) = k / k$\in$R. De acuerdo a las definiciones de límite :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}} k = k$$



"el límite de una constante es la propia constante"

2) $\lim_{x\to a} x = a$ (consecuencia directa de la def. de límite finito)

3) $\lim_{\substack{x\to a\\ n\in N, n\geq 2}} x^n = \lim_{x\to a} \overbrace{x.x.x.....x}^{n} = \overbrace{a.a.a.....a}^{n} = a^n$

teo.lím producto

4) Consecuencia de lo anterior y de los teoremas de límite de la suma y el producto surge :

Si f es una función polinómica $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE LÍMITES :
(se aplicarán los teoremas de las tablas)

1) $lím_{x\to 2} \frac{\overbrace{(x^2+3x)}^{\to 10}.\overbrace{(x-1)}^{\to 1}}{\underbrace{x+3}_{\to 5}} = 2$ 2) $lím_{x\to -1} \frac{\overbrace{x+3}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0}} = \infty$

3) lím $\frac{\overbrace{x+5}^{\to 3}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^-}} = -\infty$ Para determinar si x^2-4 tiende a 0^- o 0^+ le estudiamos

x $\to -2^+$ su signo : sig(x^2-4) + + + + + 0 - - - - - -0 + + + + + + ++
-2 ← 2 x

4) lím $\frac{\overbrace{x^3-5x^2+12}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-4}_{x\to 0}} =$ lím $\frac{\cancel{(x-2)}.\overbrace{(x^2-3x-6)}^{\to -8}}{\cancel{(x-2)}.\underbrace{(x+2)}_{\to 4}} = -2$

x→2 x→2

Este es el primer caso de indeterminación que nos encontramos.
Teniendo en cuenta que tanto numerador como denominador tienen raíz 2
Pueden factorizarse aplicando el teorema de Descartes : f(x)=(x-2).Q(x)
(siendo Q(x) el cociente de dividir f (x) entre x-2).

	1	-5	0	12
2		2	-6	-12
	1	-3	-6	0

$\Rightarrow$ x^3-5x^2+12=(x-2).(x^2-3x-6)

LÍMITES PARA X→ ∞

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty}.(x^3-2x^2+x-1) = \lim_{x\to\infty}.x^3.(\underbrace{1}_{1}-\overbrace{\frac{2}{x}}^{0}+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0}-\overbrace{\frac{1}{x^3}}^{0}) = \lim_{x\to\infty}.x^3 = \infty$

∞ ∞ ∞

Razonando en forma análoga, podemos deducir que :

$$\lim_{x\to\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to +\infty} (-2x^3+4x-1) = \lim_{x\to +\infty} (-2\overbrace{x^3}^{\to +\infty}) = -\infty$

2) $\lim_{x\to +\infty} (3x^4-4x^3+2) = \lim_{x\to +\infty} (3x^4) = +\infty$

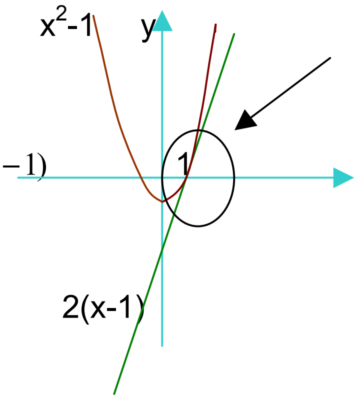
EQUIVALENTES:

DEF: $f(x) \approx g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ \infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\substack{x\to a\\ \infty}$

EJEMPLOS:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\overset{\to 2}{(x+1)}\overset{1}{\cancel{(x-1)}}}{2\underset{1}{\cancel{(x-1)}}} = 1 \xrightarrow{def.\approx} \underset{x\to 1}{x^2-1 \approx 2(x-1)}$

(Observar las gráficas en un entorno de centro 1)



2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)}{a_n x^n} = 1$ (justificar)

$\Downarrow$ def.≈

$$\boxed{\underset{x\to\infty}{(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)} \approx a_n x^n \quad (a_n \neq 0)}$$

Puede demostrarse también que:

$$\boxed{\sqrt[n]{\underset{x\to\infty}{(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)}} \approx \sqrt{a_n x^n} \quad (a_n \neq 0) \quad \text{(en condiciones de } \exists)}$$

Ejercicio: Demostrar que si $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha \neq 0 \Rightarrow \underset{x\to a}{f(x) \approx \alpha}}$

SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES:

Demostraremos que en el cálculo de límites es posible sustituir en ciertas condiciones una expresión por una equivalente sin alterar el límite.

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES EN **PRODUCTO**:

H $\underset{x\to a}{f(x) \approx h(x)}$

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$

$h(x) \neq 0 \ \forall x \in E(a,\delta)$

T $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x).g(x)$

Demostración :

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} \overset{\to 1 \text{ por H y def.}\approx}{\left(\frac{f(x)}{h(x)}\right)} .h(x).g(x) = \lim_{x\to a} h(x).g(x)$$

$\downarrow$ teoremas de límite del producto.

$\downarrow$ Divido y multiplico por $h(x) \neq 0$ en $E(a,\delta)$

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES EN **COCIENTE**:
(completar enunciado y demostración)

H $f(x) \approx h(x)$; $x \to a$

$\exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x)$

$h(x) \neq 0 \ \forall x \in E(a,\delta)$

T $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) =$ ....

Demostración :

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{\ldots\ldots\ldots}\right) \cdot \frac{h(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

→...........-

....

....

SUSTITUCIÓN EN LA **SUMA** :

Puede probarse que **es posible sustituir por equivalentes en el límite de una suma, salvo el caso de diferencia de equivalentes.**

EJEMPLOS :

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\sim 3x^2}{(3x^2+3x-6)}.\overset{\sim x}{(x+2)}}{\underset{\sim x^2}{(x^2+5)}.\underset{\sim x^2}{(x^2-5x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2.x}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$

x > 0 por ser $x\to +\infty$

$$\sim\sqrt{4x^2} = \sqrt{4}\sqrt{x^2} = 2.|x| = 2.x$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

x < 0 por ser $x\to -\infty$

$$\sim\sqrt{4x^2} = \sqrt{4}\sqrt{x^2} = 2.|x| = 2.x$$

3) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = -2$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{\sqrt{4x^2+x}}_{\sim 2x} - x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

no puede sustituirse por equivalentes

~2x ↑ por ser **diferencia de equivalentes.**

$$5)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$$

↓ ~2x

$$A-B=\frac{A^2-B^2}{A+B}$$

~ 4x

no puede sustituirse por equivalentes

~ -3x ↑ por ser **diferencia de equivalentes.**

$$6)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-5x-9x^2}{\sqrt{9x^2-5x}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x}{-6x}=\frac{5}{6}$$

↓ ~ -3x

$$A+B=\frac{A^2-B^2}{A-B}$$

~ .6x

EAyRG DE UNA FUNCIÓN RACIONAL INCLUYENDO LÍMITES, EJEMPLO:

Sea f : f (x) $=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ D(f)=R - $\{\pm 1\}$

SIGNO ; sig f (x) + + + $\nexists$ - - - - 0 + + + + $\nexists$ + + + + + +

-1 0 1 x

LÍMITES:

$$\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{\overbrace{x^2-x}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-1}_{x\to 0^{\mp}}}=\mp\infty$$

sig (x^2-1) + + + 0 - - - - - 0 + + +

-1 1 x

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x}^{\to 1}.\cancel{(x-1)}}{\underbrace{(x+1)}_{\to 2}.\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overbrace{x^2-x}^{\sim x^2}}{\underbrace{x^2-1}_{\sim x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Queda a cargo del lector efectuar el bosquejo gráfico.

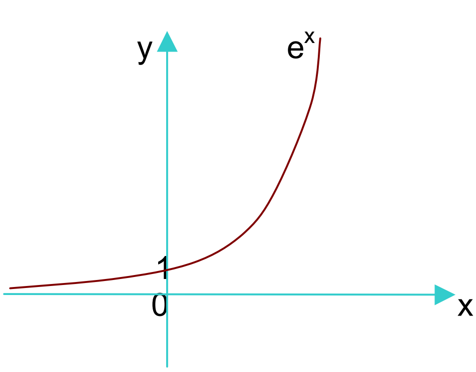
teorema de sustitución en cociente.

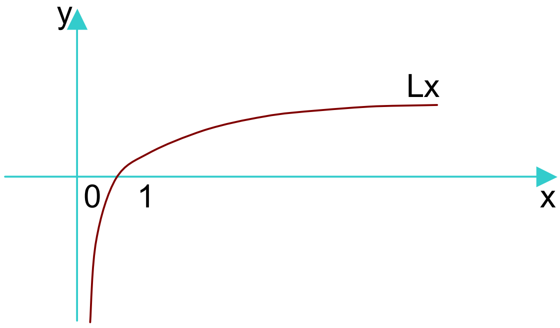
EJERCICIOS: Estudio analítico y bosquejo gráfico de :

3) f . f (x) $=\dfrac{x^2-x-2}{x^2.(x+1)}$ 4) f : f (x) $=\dfrac{x^2.(x-1)}{x^2+2x-3}$ 5) f : f (x) $=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{2x-4}$

6) f : f (x) $=x-1+\dfrac{x-3}{2x-3}$ 7) f : f (x) $=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ 8) f : f (x) $=\dfrac{|x^3-x|}{x^2+2x-3}$

LÍMITES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.





$x\to$	$e^x\to$	$u(x)\to$	$e^{u(x)}\to$	$x\to$	$Lx\to$	$u(x)\to$	$Lu(x)\to$
$-\infty$	0^+	$-\infty$	0^+	0^+	$-\infty$	0^+	$-\infty$
$a\in\mathbb{R}$	e^a	$a\in\mathbb{R}$	e^a	$a\in\mathbb{R}^+$	La	$a\in\mathbb{R}^+$	La
0	1	0	1	1	0	1	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

El teorema de límite de la función compuesta nos permite generalizar.

DOS EQUIVALENTES IMPORTANTES:

$$\underset{u(x)\to 0}{e^{u(x)}-1 \sim u(x)} \qquad \underset{u(x)\to 1}{Lu(x) \sim u(x)-1}$$

Demostraremos la validez de alguno de los contenidos en las tablas anteriores:

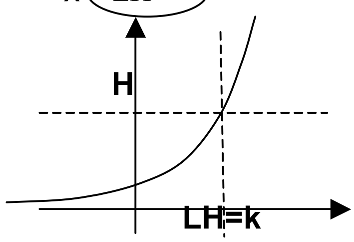
1) $lím_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Lo anterior es cierto $\xleftrightarrow{def.lím\infty}$ $\forall H>0\,\exists k>0$ / si $x>k \Rightarrow e^x > H$ k

Demostr.: $e^x > H \xleftrightarrow{prop.f.\log.} Le^x > LH \xleftrightarrow{def.\log.} x > LH$

Es decir que $\exists k>0$ / si $x>k \Rightarrow e^x > H$

Siendo **k=LH** >0, si H>1, **$k\in\Re^+$** cualquiera si $0<H\leq 1$



$\xrightarrow{def.lím.\infty} lím_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2) **si** $a \in R^{+} \rightarrow \lim_{x \to a} Lx = La$

Lo anterior es cierto $\xleftrightarrow{def.lím.finito}$

$\forall$E (α,ε) $\exists$E*(a,δ)/ $\forall$x$\in$E(a,δ) $\Rightarrow$La -ε < Lx < La + ε

Demostración:

La -ε < Lx < La + ε $\xleftrightarrow{prop.f.\exp.}$

$$e^{La-\varepsilon} \langle e^{Lx} \langle e^{La+\varepsilon} \leftrightarrow e^{La}.e^{-\varepsilon} \langle x \langle e^{La}.e^{\varepsilon} \leftrightarrow \boxed{a.e^{-\varepsilon} \langle x \langle a.e^{\varepsilon}}$$

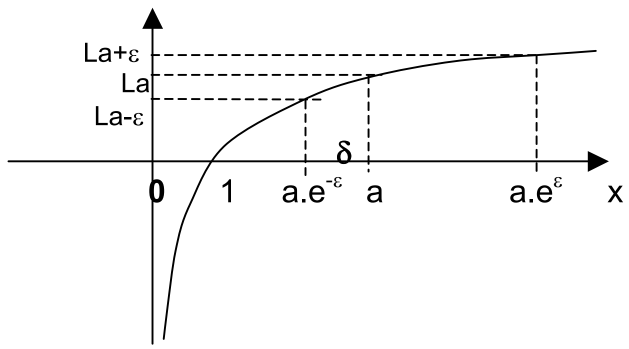
ε>0 $\rightarrow$ - ε<0 $\rightarrow$ 0<e$^{-\varepsilon}$<1 $\xrightarrow{a\rangle 0}$ 0<a.e$^{-\varepsilon}$<a

ε>0 $\rightarrow$ e$^{\varepsilon}$>1 $\xrightarrow{a\rangle 0}$ a.e$^{\varepsilon}$>a

a.e$^{-\varepsilon}$ a a.e$^{\varepsilon}$

$\Rightarrow\forall$x$\in$E(a,δ) $\rightarrow$ La -ε < Lx < La + ε $\xrightarrow{def.límite}$ $\lim_{x \to a} Lx = La$

siendo δ=mín$\{$ a.e$^{\varepsilon}$-a,a- a.e$^{-\varepsilon}\}$



EAyRG DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL INCLUYENDO LÍMITES, EJEMPLO:

$$f : f(x) = \frac{x}{x-3} e^{\frac{x+1}{1-x}} \qquad D(f)=R - \{1,3\}$$

SIGNO : sig $\frac{x}{x-3}$ + + + 0 - - - - - - - - - - $\cancel{\exists}$ + + + + + + + + + + +

0 3 x

sig $e^{\frac{x+1}{1-x}}$ + + + + + + $\cancel{\exists}$ + + + + + + + + + + + + + + + + +

1 x

sig f (x) + + + 0 - - $\cancel{\exists}$ - - - - - - $\cancel{\exists}$ + + + + + + + + + + + +

0 1 3 x

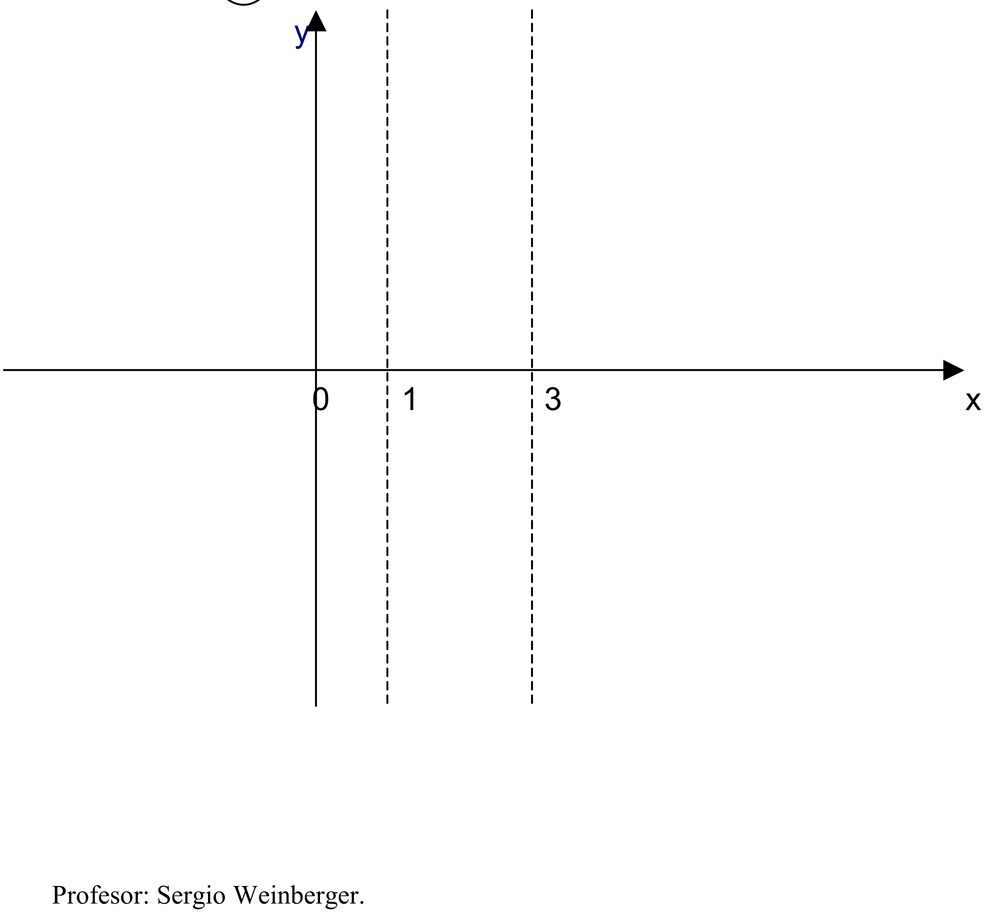
LÍMITES : $\lim_{x\to 3^-} \underbrace{\frac{\overset{3}{x}}{\underset{0^-}{x-3}}}_{\to -\infty} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{x+1}{1-x}}^{\to -2}}}_{e^{-2}>0} = -\infty$ $\lim_{x\to 3^-} \underbrace{\frac{\overset{3}{x}}{x-3}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{\frac{x+1}{1-x}}}_{e^{-2}>0} = +\infty$

$$\lim_{x\to 1^-} \underbrace{\frac{\overset{1}{x}}{\underset{-2}{x-3}}}_{\to -1/2} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{\overset{2}{x+1}}{\underset{0^+}{1-x}}}^{+\infty}}}_{+\infty} = -\infty \qquad +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \underbrace{\frac{x}{x-3}}_{\to -1/2} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{\overset{2}{x+1}}{\underset{0^-}{1-x}}}^{-\infty}}}_{0^+} = 0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \underbrace{\frac{x}{x-3}}_{\to 1}_{\sim x} e^{\overbrace{\frac{\overset{\sim x}{x+1}}{\underset{\sim -x}{1-x}}}^{-1}} = e^{-1} \cong 0,37$$

Queda a cargo del lector efectuar el bosquejo gráfico.



EAyRG DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA INCLUYENDO LÍMITES, EJEMPLO:

f : f (x) = $(x-2).L\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Dominio: $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$

$sig\,\dfrac{x-1}{x+1}$ + + + + ∃ - - - - - 0 + + + +

-1   1   x

Df=(-∞,-1)∪(1,+ ∞)

Signo $sigL\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = sig\left(\dfrac{x-1}{x+1}-1\right) = sig\,\dfrac{x-1-x-1}{x+1} = sig\,\dfrac{-2}{x+1}$

Sig L $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = sig$ + + + ∄ - - - -

-1   1   x

Sig $(x-2)$ - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + +

2

Sig f(x)   - - - - - - - - ∄ + + 0 - - - -

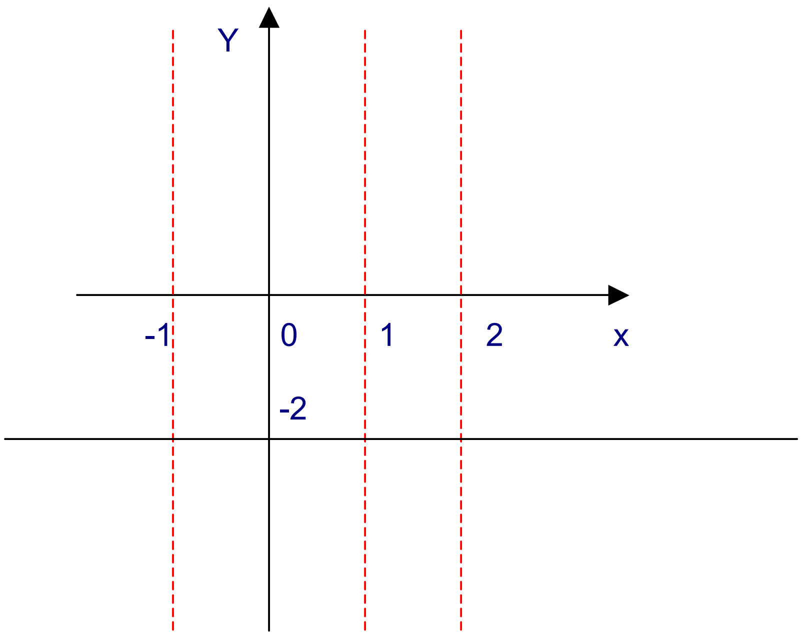
-1   1   2   x

$$\operatorname{Lim}_{x\to -1^-} \overset{-3}{(x-2)}\,\overset{+\infty}{L}\Bigg(\underset{+\infty}{\frac{x-1}{x+1}}\Bigg) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} (x-2)\,\overset{-\infty}{L}\Bigg(\underset{0+}{\frac{x-1}{x+1}}\Bigg) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \overset{\pm\infty}{\underset{\sim x}{(x-2)}}\,\overset{0}{L}\Bigg(\underset{1}{\frac{x-1}{x+1}}\Bigg) = \lim_{x\to\pm\infty} \cancel{x}^{1}\left(\frac{-2}{\cancel{x}_{1}}\right) = -2$$

$$\sim \frac{x-1}{x+1} - 1 = \frac{-2}{x+1} \sim \frac{-2}{x}$$

Bosquejo gráfico a cargo del lector.



EJERCICIOS: estudiar dominio, signo, límites y bosquejo gráfico de:

9) f : f (x) = $e^{\frac{x}{x-2}}$

10) f : f (x) = $\frac{x^2-1}{x-1}\, e^{\frac{1}{x}}$

11) f : f (x) = $\sqrt{4x^2-1}\,.e^{\frac{-3}{x-2}}$

12)- $f : f(x) = (x+3).L\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

13)- $f : f(x) = \frac{x}{1-x^2}.L\left|\frac{x+2}{x-3}\right|$

14)- $f : f(x) = \frac{|x-1|}{x}.L\left|\frac{2x+2}{x-2}\right|$

INFINITOS

Def: f(x) es un infinito para $x \to a(\infty) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}$ f(x)=∞

Ejemplos: x^2 es un infinito para $x \to \pm\infty$

e^x es un infinito para $x \to +\infty$

Lx es un infinito para $x \to +\infty$ y para $x \to 0^+$

$\frac{1}{x-1}$ es un infinito para $x \to 1$

15)Ejercicio: demostrar que:

$$L(x^2+3x) \sim Lx^2 \text{, pero } e^{x^2+x} \nsim e^{x^2} \qquad x \to +\infty$$

Orden de infinitos:

Veamos el comportamiento de los siguientes infinitos para $x \to +\infty$:
Lx, Lx^2, x^4, e^x, x^x. Complete la siguiente tabla:

X	Lx	Lx^2	x^4	e^x	x^x	$\frac{Lx}{x^4}$	$\frac{e^x}{x^4}$	$\frac{Lx^2}{Lx}$
1								
5								
10								
100								

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$+\infty$ $+\infty$ $+\infty$ $+\infty$ $+\infty$ $+\infty$

Apartir de estas ideas definiremos **orden por comparación:**

Definición: sean f(x) y g(x) infinitos para $x \to a$ .Diremos que:
∞

1)- ORD f(x)>ORDg(x) $\leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x\to a \\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

$x \to a$

$x \to \infty$

2)-ORDf(x)<ORDg(x) $\leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x\to a \\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$x \to a$

$x \to \infty$

3)-ORDf(x)=ORDg(x) $\leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x\to a \\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$

$x \to a$

en caso α=1, decimos $f(x) \sim g(x)$ (x$\to$a o x$\to\infty$)

$x \to \infty$

definición orden

Admitiremos, como se observa en la tabla anterior que:

TEOREMA DE ORDENES PARA $x \to +\infty$

$$ORD\,(L^h x) < ORD\,(x^k) < ORD\,(e^{\alpha.x}) < ORD\,(x^{\beta.x})$$

h>0 k>0 α>0 β>0

$x \to +\infty$

Estos infinitos se llaman respectivamente: logarítmico, potencial, exponencial, potencial-exponencial

APLICACIONES :

→+∞ (potencial)

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{e^{2x}} = 0$$ por definición y teorema de órdenes.

→+∞ (exponencial)

→+∞ (potencial)

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{L^2 x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{L^2 x} = +\infty$$ (por órdenes)

→+∞ (logarítmico)

→0

3) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$ <u>no es indeterminado!!</u>

→ - ∞

En este caso e^x no es un infinito. El teorema anterior solo es válido para →+∞.

CAMBIOS DE VARIABLE PARA APLICAR TEOREMA CON X→+∞

A efectos de poder aplicar el teorema de infinitos para x→ ∞, en algunas Indeterminaciones pueden hacerse cambios de variable adecuados.

Algunos de ellos pueden ser :

$$si.x \to a^{+}, hacemos..: z = \frac{1}{x-a} \to +\infty$$
$$si.x \to a^{-}, hacemos..: z = -\frac{1}{x-a} \to +\infty$$
$$si.x \to -\infty, hacemos..: z = -x \to +\infty$$

1) $$\lim_{x\to 2^{+}} \underbrace{(x^2-4)}_{\to 0}.e^{\overbrace{\frac{1}{x-2}}^{\to+\infty}} = \lim_{x\to 2^{+}} \underbrace{(x+2)}_{\to 4}.(x-2).e^{\frac{1}{x-2}} =$$

+∞

$$= \lim_{x\to 2^{+}} 4.(x-2).e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{z\to+\infty} 4.\frac{1}{z}.e^{z} = \lim_{z\to+\infty} 4.\frac{e^{z}}{z} = +\infty$$

$z = \frac{1}{x-2} \to +\infty$ (por órdenes)

2) $$\lim_{x\to -1^{-}} \underbrace{\frac{x+3}{x^2+x}}_{\infty} e^{\overbrace{\frac{2}{x+1}}^{-\infty}} = \lim_{x\to -1^{-}} \frac{2}{x.(x+1)} e^{\frac{2}{x+1}} =$$

0

$$\lim_{x\to -1^{-}} -\frac{2}{x+1} e^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{z\to+\infty} z.e^{-z} = \lim_{z\to+\infty} z.\frac{1}{e^{z}} =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \frac{z}{e^{z}} = 0$$ (por órdenes) $z = \frac{-2}{x+1}$

$z = \frac{1}{x-3}$

3) $$\lim_{x\to 3^{+}} (x^2+x-12).L(x-3) = \lim_{x\to 3^{+}} \underbrace{(x+4)}_{\to 7}.(x-3).L(x-3) =$$

$$\lim_{z\to+\infty} 7.\frac{1}{z}.L\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to+\infty} 7\underbrace{\left(-\frac{Lz}{z}\right)}_{\to 0} = 0$$

L1-Lz
=0

SUMA DE INFINITOS DE DISTINTO ORDEN : Demostraremos que suma de infinitos de distinto orden es equivalente al de mayor orden.

$$\left.\begin{array}{c}\text{f (x) y g (x) infinitos para } x\to a(\infty)\\ \text{ord[f(x)]<ord[g(x)]}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} f(x)+g(x)\sim g(x)\\ x\to a(\infty)\end{array}$$

Demostración :

$$\text{lím}_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}=\text{lím}_{x\to a}\Big(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{0}+\underbrace{\frac{g(x)}{g(x)}}_{1}\Big)=1 \xrightarrow{\text{def.}\approx} \begin{array}{c} f(x)+g(x)\approx g(x)\\ x\to a\end{array}$$

por H y def. ordenes

ieo lím. Suma

$$\text{Ejemplo : } \text{lím}_{x\to+\infty}\,(\overbrace{e^{x}-x^{2}}^{\sim e^{x}\text{ por teo anterior}})=\text{lím}_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$$

Ejercicio 16: Sean u:u(x)=L(x-1) v:v(x)= $\dfrac{1}{x-1}$.

a)Investigar cual e estos dos infinitos para $x\to 1^{+}$ es de mayor orden.

b) Calcular $\text{lím}_{x\to 1^{+}}\left(L(x-1)+\dfrac{1}{x-1}\right)$

EJERCICIOS: Calcular los siguientes límites:

17) $lím_{x\to 3}\dfrac{e^{x^2-3x}-1}{2x-6}$ 18) $lím_{x\to -1}\dfrac{L(3x+4)}{x^2-1}$ 19) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x-5}(e^{\frac{2}{x}}-1)$

20) $lím_{x\to 2}\dfrac{L(3x+5)-L(7x-3)}{-x^2+5x-6}$ 21) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{4x^5}{e^{2x}}$ 22) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{Lx}$

23) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{L(x^2-7x-1)}{4x-3}$ 24) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-x}{Lx+x}$ 25) $lím_{x\to-\infty}\dfrac{e^{3x}-x}{L|x|+x}$

26) $lím_{x\to -2^{+}}\dfrac{x^2+2x}{x+5}e^{\frac{1}{x+2}}$ 27) $lím_{x\to 3^{-}}\dfrac{x-2}{x^2-9}e^{\frac{1}{x-3}}$ 28) $lím_{x\to 1^{+}}(x^2+3x-4).L(x-1)$

29) $lím_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x}$ 30) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ 31) $lím_{x\to 2^{-}}\dfrac{x-3}{x-2}+L|x^2-2x|$

<u>EJERCICIOS</u>: estudiar dominio, signo, límites y bosquejo gráfico de:

32) f : f(x) = $(x^2 + 2x).e^{\frac{1}{x+2}}$

33) f : f (x) = $\dfrac{3x-1}{x+2} e^{\frac{2}{x^2+5x+6}}$

34) f : f (x)= $\dfrac{x+2}{x-1} L(4x^2 - 1)$

35) f : f (x) = $\dfrac{x^2+x}{x-2} L\left|\dfrac{2x+2}{2x-6}\right|$

36) f : f (x) = $\dfrac{x+3}{L|x+2|}$

37) f : f (x) = $\dfrac{e^x - 2}{L|x| - 3}$

38) f : f (x) = $\dfrac{L|x+2| - 1}{|x+1| - 2}$

39) f : f (x) = $\dfrac{L^2|x|}{e^{2x} + e^x - 2}$