PREPARACION MATEMATICA A 2DA PP

1)a)i) Demostrar que:

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } f(x) \text{ y } g(x) \text{ son infinitos } (x\to+\infty)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\alpha\in R,\ \underset{x\to+\infty}{\mathrm{ord}}(f(x)) > \mathrm{ord}(g(x))\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)+g(x)+h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$$

ii) Demostrar:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \underset{x\to3}{\sim} h(x)\\ \exists \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{g(x)}\end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{g(x)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{h(x)}$$

b) Calcular : i) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{L(x^2+x-11)}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2e^{\frac{1}{x}}+x+3Lx}{x-3}$

Mencionar propiedades y definiciones empleadas en el cálculo.

b) EA y RG de $f:f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}e^x$

2) a) Sean $u:u(x)=L|x-1|$ y $v:v(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x$

i) Calcular, aplicando la definición de derivada: $u'(0)$ y $v'(0)$

ii) Sea $f:f(x)=L|x-1|+\dfrac{1}{2}x^2-x$. Justificar que f ‘(0)= -2 **<u>(sin hallar f ’(x))</u>**

b) Sea $f:f(x)=L|x-1|+\dfrac{1}{2}x^2-x$

i) Investigar si es posible aplicar el teorema de Bolzano a la función f en los intervalos [1/2,3] y [3/2,3]. Fundamentar respuestas.

ii) EA y RG de f.
Se construirán tangentes a la gráfica de f en los puntos (0,f(0)) y (2,f(2)).

c) Se considera:

$$g:g(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ -x^2+2x & \text{si } 0\le x\le 2\\ \sqrt{x-2}+1 & \text{si } \mathbf{x>2}\end{cases}$$

i) Estudiar continuidad y derivabilidad de f en 0 y en 2
ii) Graficar f

3)a) Se considera la función f : f(x)= $2L|x-1|-\frac{5}{4}x-\frac{1}{x-1}$

i) ¿Es posible aplicar el teorema de Bolzano a dicha función en el intervalo : [0,2] ?¿y en el [0,3/5]?. Justificar respuestas.

ii) EAyRG de f

iii) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0,1). Graficar dicha recta junto a la gráfica de f.

b) Verdadero o falso?. Justificar respuestas.

i) si g tiene un mínimo relativo en a $\Rightarrow$ g'(a)=0

ii) si h'(a)=0 $\Rightarrow$ h tiene un mínimo o un máximo relativo en a.

4) a) Calcular, justificando procedimiento(mencionar teoremas o definiciones empleadas, puede emplearse en algún caso L'Hopital)

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-Lx}{e^{x-1}-x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)e^{\frac{2}{x-2}}$ 3. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^x+x}{x-L|x|}$

b) Verdadero o falso?. Justificar respuestas.

i) si f es derivable en 3 $\Rightarrow$ $\text{lím}_{x\to 3} f(x)=f(3)$

ii) si $g: g(x)=\sqrt[3]{x}$ $\Rightarrow$ g es derivable en 0

iii) si h es continua en a $\Rightarrow$ $\exists \text{lím}_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}\in R$

c) Graficar una función g, continua $\forall$x≠1 y que cumpla:

sig g(x) + + + + + 0 - - ∄+ + 0 - - - - - - -
0 1 5/2 x

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{g(x)}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(g(x)+x)=1$

sig g '(x) + + 0 - - - - - ∄+ +∄ - - - - - - - - -
-1 1 2 x

g(-1)=2, g(2)=3, $\lim\limits_{x\to 2^-} g'(x)=6$ $\lim\limits_{x\to 2^+} g'(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)=0$

sig g''(x) + 0 - - - - - ∄+ +∄+ + + + + + + +
-2 1 2 x

g (-2)=1, g '(-2) = 3

5)a) Sea $u:u(x)=2x^3+3bx^2+6x+11 \quad b\in R$

i) Estudio analítico de u sin u'' y efectuar bosquejos gráficos, discutiendo según $b\in R$.

ii) Hallar b de manera de poder aplicar el teorema de Rolle a la función u en el intervalo [0,1]. Hallar en este caso el valor del correspondiente "c".

b) Sea $f:f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x-2+L|2x+3|$

i) Demostrar que f tiene una raíz en el intervalo (0,1/3).

ii) EAyRG de f , sin f **''**. Se sabe que f **'** tiene una raíz $\alpha \cong -1{,}67$.

Escribir un posible signo de f **''** coherente con lo anterior.

c) Demostrar que si $\text{lím}_{x\to a}\dfrac{v(x)-v(a)}{x-a}=-2 \Rightarrow \quad v\downarrow$ en a

¿Vale el recíproco?. Fundamentar.

6)A) Sean dos funciones reales $f: f(x)=\dfrac{x^2-x}{Lx}$ y $w: w(x)=(2x-1).Lx$.

a) 1) Realiza el bosquejo gráfico de w.

b) 2) Halla le ecuación de la recta tangente al gráfico de w en (1, $w(1)$).

B) Indica el número de raíces de la ecuación: $w(x)-\lambda(x-1)=0$

c) Realiza el EA y la RG de f sin estudiar f'' .

C) Sea $f: f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x+2}}.(ax+2) \leftrightarrow x\le -1 \\ -L(x+2)+e^{-1} \leftrightarrow x>-1 \end{cases}$

1) Halla $a\in\Re$ de modo que f sea continua en x= - 1

2) Para el valor de a hallado en la parte 1 ¿es f derivable en $(-1, f(-1))$, justifica.

Sea $f: f(x)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{x+2}}.(x+2) \leftrightarrow x\le -1 \\ -L(x+2)+e^{-1} \leftrightarrow x>-1 \end{cases}$ realiza

7) **a)** Sea f una función que cumple las siguientes condiciones:

$d(f) = R - \{1\}$ f es continua en su dominio.

sig f(x) - - - - - 0 + + + 0 - - - - - ∄ + + + 0 + + +

$-\frac{5}{2}$ **0** **1** **2** **x**

$\text{lím}_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\text{lím}_{x\to 1^-} f(x) = -1$, $\text{lím}_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\text{lím}_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\text{lím}_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0$

sig f ' (x) + + + + + + 0 - - - - - - - - ∄ - - - - ∄ + + + +

-1 **1** **2** **x**

f(-1)=1 $\text{lím}_{x\to 2} f'(x) = \infty$, $\text{lím}_{x\to 1^-} f'(x) = 0$

sig f ''(x) + + 0 - - - - - - - - - - - 0 + + + + + ∄ + + 0 - - ∄ - - - -

- 3 **0** **1** **3/2** **2** **x**

f(-3)=-1 **f(3/2)=3/2** **f '(- 3)=3** **f '(0)=- 4** **f '(3/2)=-1**

<u>Graficar una función f que cumpla con todos los datos anteriores</u>

b) Verdadero o falso? Fundamentar.

i) Si g:g(x) = $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } x \geq -1 \\ e^{x+1} + 5x & \text{si } x < -1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ g es derivable en -1

ii) La función $h : h(x) = e^{\frac{1}{x}}(3x - 2)$ tiene asíntota y=3x para $x \to \pm\infty$

iii) si $g : g(x) = \sqrt{x+2}$, a > -2 $\Rightarrow$ g'(a)= $\frac{1}{2\sqrt{a+2}}$ (aplicar def. de derivada)

Ejercicio nº 8

Dada $f\,/\,f(x)=\begin{cases} -x^2+e.x & x\geq e \\ 2.\left(L|x|-2+\dfrac{e}{x}\right) & 1\leq x\leq e \\ 2.(1-e)|x|+(4e-6) & x<1 \end{cases}$

a) Estudiar continuidad y derivabilidad de f en $0,1,e$ (aplicando la definición).

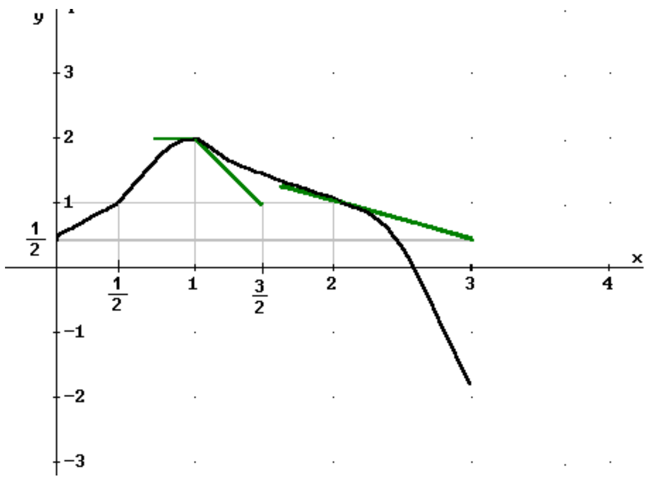
b) Hallar la ecuación de la recta tangente al G(f) en el o los casos que corresponda de los estudiados en la parte a).

c) Bosquejar f en $[-1,3]$.

d) ¿Verdadero o Falso?

Demostrar

e) $\exists m\in\Re\,/\,\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2f(x)-2f(a)}{x-a}=m \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left(x^2.f(x)\right)=a^2.f(a)$



Ejercicio nº 9

La RG adjunta, corresponde a una función $w:[0,3]\to\Re$.

a) Observar que $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)=1$, sin embargo, $\nexists\, x\in\left(\dfrac{1}{2},3\right)/\,f'(x)=0$, ¿contradice esto el teorema de Rolle? ¿Por qué?

b) Demostrar que $\exists c\in[0,2]\,/\,w(c)=c$.

c) Completar:

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} w'(x)=$ ....   (2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{w(x)-w(1)}{x-1}=$ ....

(3) $w(x)$...................... derivable en 1   (4) $w(x)$...................... derivable en 2

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{w(x)-w(2)}{x-2}=$ .... $\begin{pmatrix} < \\ > \\ = \end{pmatrix}0 \Rightarrow w$ es estrictamente .... en 2.

d) Demostrar la proposición enunciada en la parte c) 5)

Ejercicio nº 10

a) 1) Sea $f \,/ \lim_{x\to a} f(x)=5$, demostrar que $\exists \omega \,/ \lim_{x\to a} \omega(x)=0 \;\; y \;\; f(x)=5+\omega(x)$.

2) Calcular $\lim_{x\to a} \dfrac{e^{f(x)-5}-1}{L(\omega(x)+1)^{\sqrt{2}}}$, siendo f , ω las funciones de la parte a)1).

b) Sea $f \,/\, f(x)=-x^2+ex$,

1) Demostrar que $\exists a \in [e,6] / \; f'(a)=-6$
2) Hallar el valor de $a \in \Re$.
3) Hallar la ecuación de la recta tangente al G (f) en a .

c) Completar la proposición y luego demostrarla:

" H) $\begin{cases} f \text{ tiene un máximo relativo en } x=a \\ \exists \;\; f'(a) \end{cases}$ T) $\{ f'(a) =$ ....

11)a) Sea f: f(x)= L $|$x-2$|$+ a(x^2 – 4x+3) con a $\in$ R*

i)Discutir según a $\in$ R* el signo de f '(x). Observar que si a<o, f '(x) tiene dos raíces α y $\beta \,|\, \alpha < 2 < \beta$.

ii) Verificar que 1 y 3 son raíces de f $\forall$a$\in$R*

¿Puede aplicarse el teorema de Rolle a f en [1,3]? Justificar.

iii) EA de f, discutiendo según a$\in$R* y efectuando bosquejos gráficos en cada caso. No se hallará f '', se escribirá un posible signo de f''(x).

b)Verdadero o Falso? Fundamentar.

i) f tiene máx. relativo en 1 $\rightarrow \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$

ii) si f $\uparrow$ en 1 $\rightarrow \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \alpha \in R^+$

iii) Si f tiene máx. o min. relativo en a

$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha \in R$ $\Big\} \rightarrow \alpha = 0$

12) a) i) Demostrar que si $r(x)=e^{x-1}$, $a\in R$ $\Rightarrow$ $r'(a)=e^{a-1}$

ii) Sea $u:u(x)=10(x^2+3x+2)e^{x-1}$. Efectuar un bosquejo gráfico de u, estudiando dominio, signo y calculando límites.

Se sabe que sig u'(x) + + + + + 0 - - - - - 0 + + + + + + ⟶ x

$\alpha\cong$ -3,62 $\beta\cong$ -1,38

u(α) = M $\cong$ 0,42 , u(β)= m $\cong$ -0,23.

b) EA de f : f(x) = $10(x^2+x+1)e^{x-1}$ **- kx** sin f '', discutiendo según k$\in R^+$. Efectuar bosquejos gráficos en cada caso.

c) Verdadero o falso? Fundamentar.

i) si g$\downarrow$ en a $\rightarrow$ g'(a)<0

ii) $\text{lím}_{x\to a}\dfrac{t(x)-t(a)}{x-a}=-2\Rightarrow\exists E^*_-(a,\delta)/\forall x\in E^*_-(a,\delta)\rightarrow t(x)>t(a)$

iii) v cont. en [a,b]. V(a)>5>v(b) $\Rightarrow$ $\exists$c$\in$(a,b) / v(c)=5

13) a) Sea $f:f(x)=2L|x-1|+x^2-5x+4$

i) Justificar si es posible aplicar el teorema de Bolzano a f en los intervalos [0,2] y $\left[\dfrac{5}{10},\dfrac{6}{10}\right]$.

ii) ¿Es posible afirmar la existencia de una única raíz de f en $\left[\dfrac{5}{10},\dfrac{6}{10}\right]$? Justificar respuesta.

iv) EAyRG de f.

b) Verdadero o falso? Fundamentar.

i) si $\text{lím}_{x\to a^-}g'(x)=\text{lím}_{x\to a^+}g'(x)\Rightarrow g$ es derivable en a

ii) si $\text{lím}_{x\to 2}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=3\Rightarrow\text{lím}_{x\to 2}h(x)-h(2)=0$