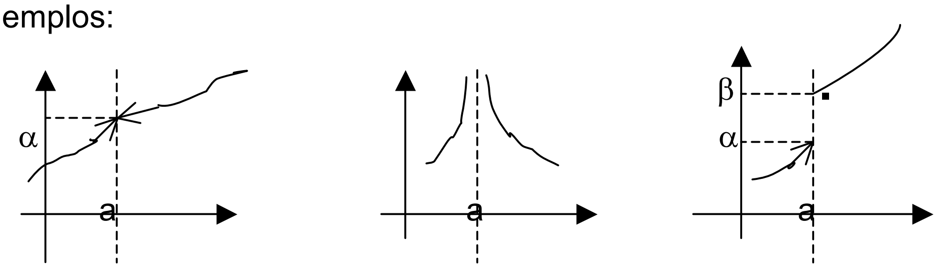
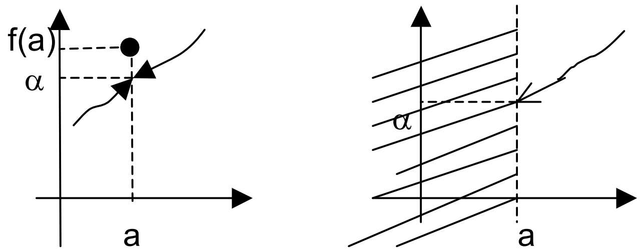
CONTINUIDAD-CURSO 6TO-MATEMÁTICA

SÍNTESIS TEÓRICO-PRÁCTICA PROF. SERGIO WEINBERGER

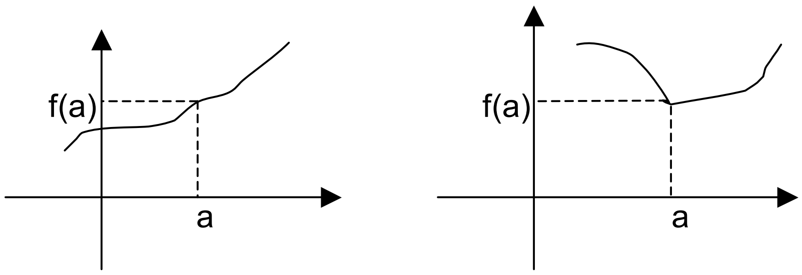
INTRODUCCIÓN: La idea de una función "continua en a" es aquella en la cual $\exists$ f(a) y no presenta "saltos" en a.

Ejemplos:





En todos estos casos la **función no es continua (discontinua) en a**



En estos últimos casos la función es continua en a.

DEFINICIÓN:

f es continua en a $\longleftrightarrow$ **1) $\exists$ f(a)**

2) $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = f(a)$

Lo anterior puede expresarse de forma más breve:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Observación : La definición de continuidad requiere la existencia de f(a), por lo tanto el conjunto de reales para los cuales f es continua

"el conjunto de continuidad" está incluido en el dominio de f.

EJEMPLOS:

1) Si f es una función polinómica $\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \longrightarrow$ f cont.en a$\forall a\in\Re$

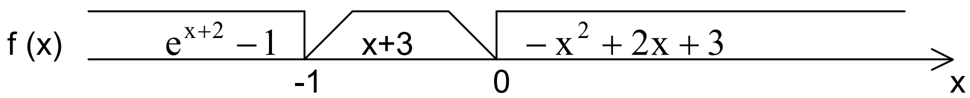
por tanto una función polinómica es continua $\forall x\in\Re$, coincidiendo en este caso con el dominio.

2) Sea f : f(x) = $\sqrt{x}$ D(f)=$\Re^{+}\cup\{0\}$. Estudiaremos la continuidad de f :

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } a>0 \to \lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \xrightarrow{\text{por def.cont.}} \text{f cont. en a} \\ \text{si } a=0 \to \nexists \lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} \quad (\nexists \lim\limits_{x\to a^-} \sqrt{x}) \to \text{f no es cont. en 0} \\ \text{si } a<0 \to \nexists\, f(a) \to \text{f no es cont. en a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f cont. } \forall x\in\Re^{+}$$

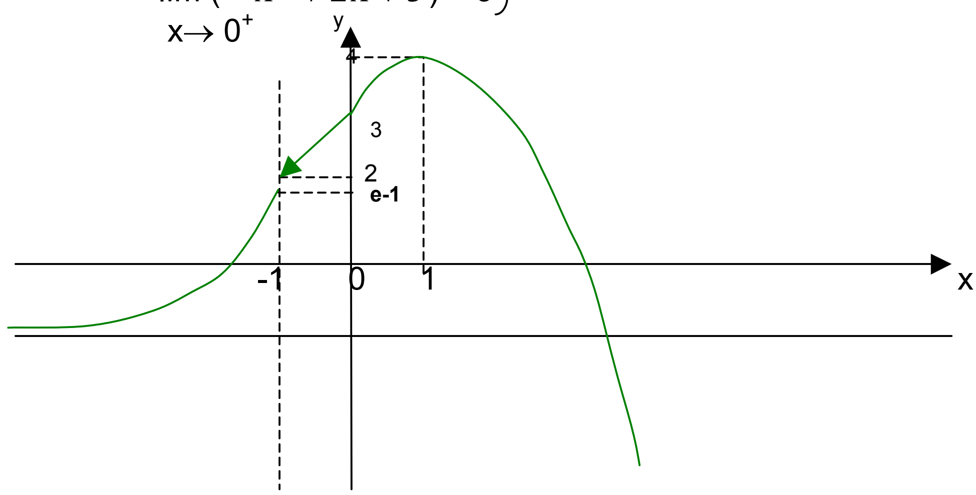
En este caso el conjunto de continuidad ha perdido el 0 respecto al dominio.

3) Sea f : f (x) = $\begin{cases} e^{x+2}-1 & \text{si } x\le -1 \\ x+3 & \text{si } -1<x<0 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ a) Estudiar cont. de f en –1 y en 0. b) Graficar f.



cont. en –1 : $\left.\begin{array}{l} f(-1) = e^{-1+2}-1 = e-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} (e^{x+2}-1) = e-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (x+3) = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{por def.cont.}}$ f no cont. en -1

cont. en 0 : $\left.\begin{array}{l} f(0) = -0^2+2.0+3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (x+3) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2+2x+3) = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{por def.cont.}}$ f cont. en 0



EJERCICIO1: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones :

a) f : f(x)= e^x b) f : f(x)= Lx c) f : f(x)= $|x|$

d) f : f (x) = sg(x). Puede definirse sg(0) de modo que f sea cont. en o ?

EJERCICIO2:

Sea f : f (x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \le -1 \\ L|x|-3 & \text{si } -1<x<0 \\ \sqrt{x}-2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) Estudiar cont. de f en -2, –1 y en 0.

b) Graficar f.

¿Podría hacerse f continua en –2 si definiéramos f(-2)?

CONTINUIDAD LATERAL:

Def : f es cont. en a^+ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

f es cont. en a^- $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Observación: De acuerdo a esta definición :

> f es cont. en a $\Leftrightarrow$ f es cont. en a^- y f es cont. en a^+

CONTINUIDAD EN INTERVALOS :

Definiciones:

1) f es continua en (a,b) $\Leftrightarrow$ f es continua $\forall x \in (a,b)$
2) f es continua en [a,b] $\Leftrightarrow$ f es continua $\forall x \in (a,b)$,
   f es cont. en a^+
   y f es cont. en b^-

EJERCICIO3: Considerando la función del ejercicio 2, analiza continuidades laterales de ésta en 0. ¿es f continua en (-1,0)?¿en [-1,0]?¿y en [0,1]? Justifique respuestas.

OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS :

TEOREMAS DE CONTINUIDAD DE SUMA,PRODUCTO Y COCIENTE :

1) Si f es continua en a y g es cont. en a $\Rightarrow$ f+g es cont. en a
2) Si f es continua en a y g es cont. en a $\Rightarrow$ f.g es cont. en a
3) Si f es continua en a, g es cont. en a y **g(a)≠0** $\Rightarrow$ f /g es cont. en a

Demostraremos 1) y los demás quedan a cargo del lector :

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) \underset{\text{def. función suma}}{=} \lim_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{f(a)} + \underbrace{g(x)}_{g(a)} \underset{\text{por teo.lím.suma}}{=} f(a) + g(a) \underset{\text{def. función suma}}{=} (f+g)(a)$$

por H y def. cont.

EJERCICIO4: a) Demostrar 2)y3) (teos.cont.producto y cociente)

b) Sean : f:f(x)= $\begin{cases} -2 \text{ si } x<0 \\ 2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ g:g(x)= $\begin{cases} 3 \text{ si } x<0 \\ -1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

¿es continua f+g en 0? ¿son continuas f y g en 0?
¿vale el recíproco de los teoremas aneriores?

c) si h es una función / h^2 es continua. ¿puede afirmarse que h es continua en a?

EJEMPLO: Estudiaremos la continuidad de la función: f:f(x)= $\dfrac{\sqrt{x+3}}{(x-7).L(x-5)}$

1) $\sqrt{x+3}$ es **continua ∀x > - 3** (continuidad de la función radical)
(continuidad del numerador)

$\left.\begin{array}{l} \text{2) x-7 cont.}\forall x\in\Re \text{ (cont.func.polinómica)} \\ \text{L(x-5) es cont.}\forall x > 5 \text{ (cont. func. logarítmica)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{cont.del producto}}$ (x-2)L(x-2) **cont.∀x > 5**

(continuidad del denominador)

3) (x-7).L(x-5)≠0 ⇔ x≠7 y x≠6
(denominador no nulo)

$\xrightarrow{\text{de 1),2)y3)y por teo.cont.cociente}}$ $\boxed{\textbf{f es continua } \forall x > 5\textbf{, con } x\neq 6 \textbf{ y } x\neq 7}$

EJERCICIO5: Estudiar continuidad de la función f : f(x)= $\dfrac{x^2-5x}{(e^{x+2}-3)(L|x+2|)}$

CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN COMPUESTA:

$\left.\begin{array}{l} \text{Si f es cont. en a} \\ \text{g es cont. en f(a)} \end{array}\right\} \Rightarrow$ (g o f) cont. en a

Demostración: $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = g[f(a)] = (g \circ f)(a) \Rightarrow$ gof cont. en a
(por cont.de g en f(a))
$\downarrow$
f(a) por cont. de f en a (H).

Ejemplo : Sea f : f(x) = L(x^2-1)

x^2-1 cont.∀x∈ℜ (cont.func.polinómica)
u= x^2-1>0 ∀x∈(-∞,-1) ∪ (1,+∞)
Lu es cont.∀u > 0 (cont. func. logarítmica)

$\Big\downarrow$ cont. función compuesta

f cont. ∀x∈(-∞,-1) ∪ (1,+∞)

TEOREMA DE BOLZANO:

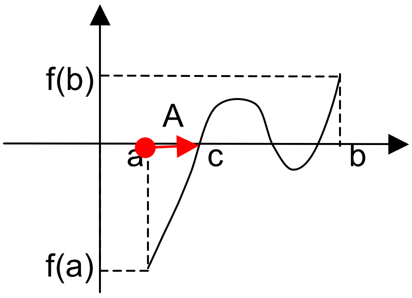
H f cont. en [a,b] , f(a).f(b)<0	T $\exists c \in (a,b)$ / f(c)=0

Demostración :

Obs: El teorema **no asegura la unicidad de la raíz en (a,b)**

A efectos de la demostración supondremos f(a)<0 y f(b)>0

Consideramos un conjunto auxiliar : **A= $\{x \in [a,b]$ / $f(x)<0\}$**



La demostración consiste en ver que dicho conjunto tiene extremo superior y que éste es raíz de f en (a,b).

$\boxed{\begin{array}{l} *\ A \subset \Re \text{ y } A \neq \emptyset \text{ pues } a \in A \quad \text{(def.A)} \\ *\ A \text{ está acotado superiormente por b (def.A)} \end{array}}$

$\downarrow$ por axioma de continuidad.

$\boxed{\exists \mathbf{c} = \overline{\text{ext}}(A)}$, al ser a y b cotas inf. y sup. respect.de A $\rightarrow$ **a $\leq$ c $\leq$ b**. (más adelante veremos que c$\neq$a y c$\neq$b)

$\downarrow$ al ser f cont. en [a,b] por H

$\boxed{\exists \mathbf{f(c)} \in \Re}$ Probaremos que f(c)=0,suponiendo por absurdo f(c)<0 o f(c)>0

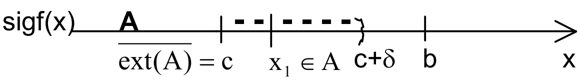
1) **Supongamos f(c)<0.** Si así fuera c$\neq$b $\xrightarrow{\text{por Hip.}}$ f es cont. en c^+

$\xrightarrow{\text{def.cont.}} \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)<0 \xrightarrow{\text{teo.cons.signo}} f(x)<0\ \forall x \in E^*_+(c,\delta)$

ABSURDO

Tomando un $x_1 \in E^*_+(c,\delta) \cap [a,b] \xrightarrow{\text{def.A}} \boxed{x_1 \in A, \text{ pero } x_1 > c = \overline{\text{ext}}(A)}$ lo cual es absurdo por def. de $\overline{\text{ext}}$.

$\rightarrow$ f(c)$\not<$0 y por tanto c$\neq$a.



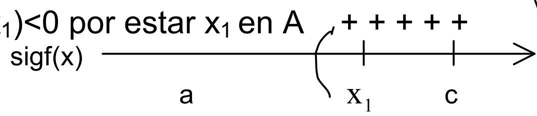
2) **Supongamos f(c)>0.** Si así fuera c$\neq$a $\xrightarrow{\text{por Hip.}}$ f es cont. en c^-

$\xrightarrow{\text{def.cont.}} \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)>0 \xrightarrow{\text{teo.cons.signo}} f(x)>0\ \forall x \in E^*_-(c,\delta)$

$\xrightarrow{\text{prop.}\overline{\text{ext}}} \exists\ x_1 \in E^*_-(c,\delta) \cap A \rightarrow$ f(x_1)>0 por estar x_1 en el semientorno

f(x_1)<0 por estar x_1 en A

ABS.



$\rightarrow$ f(c)$\not>$0 y por tanto c$\neq$b.

$\xrightarrow{\text{por 1 y 2}}$ $\boxed{\mathbf{f(c)=o \text{ con } c \in (a,b)}}$

EJEMPLO: Sea f : $f(x) = L|x-2| - x$

Demostrar que f tiene al menos una raíz en (0,1)

Aplicaremos el teorema de Bolzano:

1) $f(0)= L2>0$, $f(1)= -1<0$

2) $\left.\begin{array}{l} L|x-2| \text{ cont. } \forall x \neq 2 \text{ (cont. función log.)} \\ -x \text{ cont. } \forall x \in \Re \text{ (cont. función polin.)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{teo.cont.suma}} f \text{ cont. } \forall x \in \Re,\ x \neq 2 \rightarrow f \text{ cont. en } [0,1]$

$\xrightarrow{\text{de 1) y 2) por teo.de Bolzano}} \exists c \in (0,1) \,/\, f(c)=0$

EJERCICIO6:

Demostrar que f : $f(x) = e^{x-3} + x^2 - 16$
tiene al menos una raíz en el intervalo (3,4)

EJERCICIO7:

Sea f / f es cont. en [a,b], $f(a)<a$, $f(b)>b$.
Demostrar que $\exists c \in (a,b) \,/\, f(c)=c$
(se sugiere considerar la función $g/g(x)=f(x)-x$)

TEOREMA DE DARBOUX (aplicación de Bolzano)

H f cont. en [a,b]
$f(a)<k<f(b)$, $k \in \Re$

T $\exists c \in (a,b) \,/\, f(c)=k$

Demostración:

Tomaremos una función auxiliar g : $g(x) = f(x) - k$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont. en } [a,b] \text{ por H} \\ -k \text{ cont. en } [a,b] \text{ (cont.función cte.)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{cont.func.suma}} g \text{ cont. en } [a,b]$

$g(a) = f(a) - k < 0$ por H
$g(b) = f(b) - k > 0$ por H

$\xrightarrow{\text{por teo.de Bolzano}} \exists c \in (a,b) \,/\, g(c)=0 \rightarrow f(c) - k = 0 \rightarrow f(c) = k$