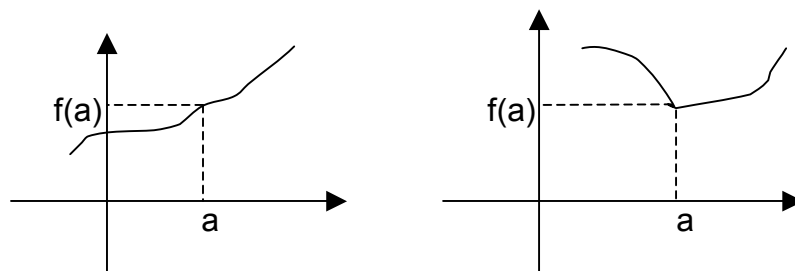
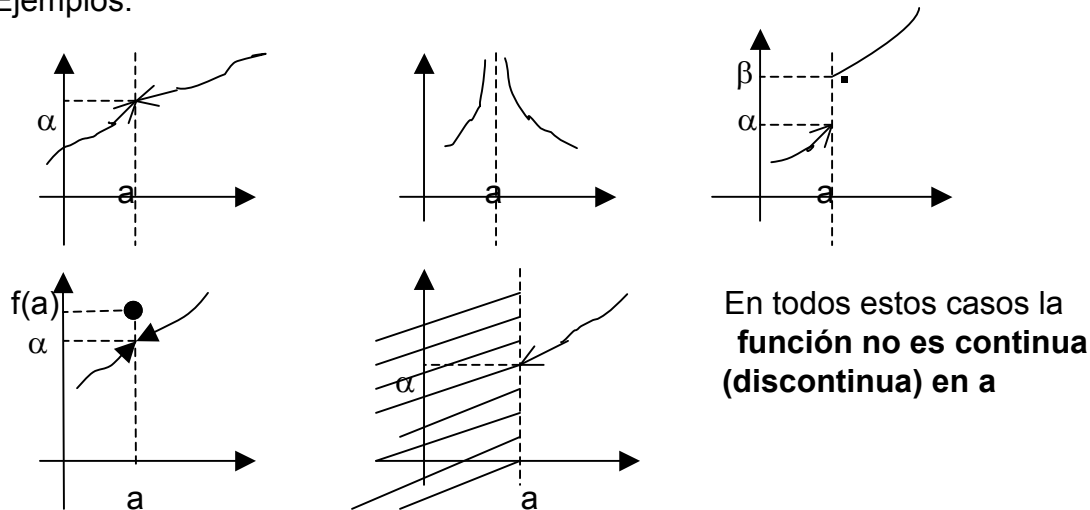


CONTINUIDAD-CURSO 6TO-MATEMÁTICA

SÍNTESIS TEÓRICO-PRÁCTICA PROF. SERGIO WEINBERGER

INTRODUCCIÓN: La idea de una función “continua en a” es aquella en la cual $\exists f(a)$ y no presenta “saltos” en a.

Ejemplos:



En estos últimos casos la función es continua en a.

DEFINICIÓN:

f es continua en a \iff **1) $\exists f(a)$**
2) $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = f(a)$

Lo anterior puede expresarse de forma más breve:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Observación : La definición de continuidad requiere la existencia de $f(a)$, por lo tanto el conjunto de reales para los cuales f es continua “el conjunto de continuidad” está incluido en el dominio de f.

EJEMPLOS:

1) Si f es una función polinómica $\longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \longrightarrow f$ cont. en $a \forall a \in \mathbb{R}$

por tanto una función polinómica es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, coincidiendo en este caso con el dominio.

2) Sea $f : f(x) = \sqrt{x}$ $D(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Estudiaremos la continuidad de f :

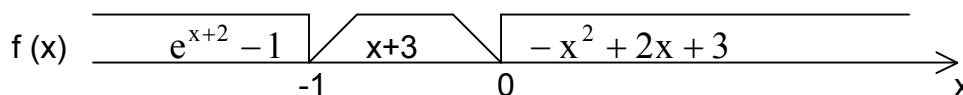
si $a > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \xrightarrow{\text{por def. cont.}} f$ cont. en a

si $a = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} \neq \lim_{x \rightarrow a^-} \sqrt{x} \rightarrow f$ no es cont. en $0 \Rightarrow f$ cont. $\forall x \in \mathbb{R}^+$

si $a < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} \neq f(a) \rightarrow f$ no es cont. en a

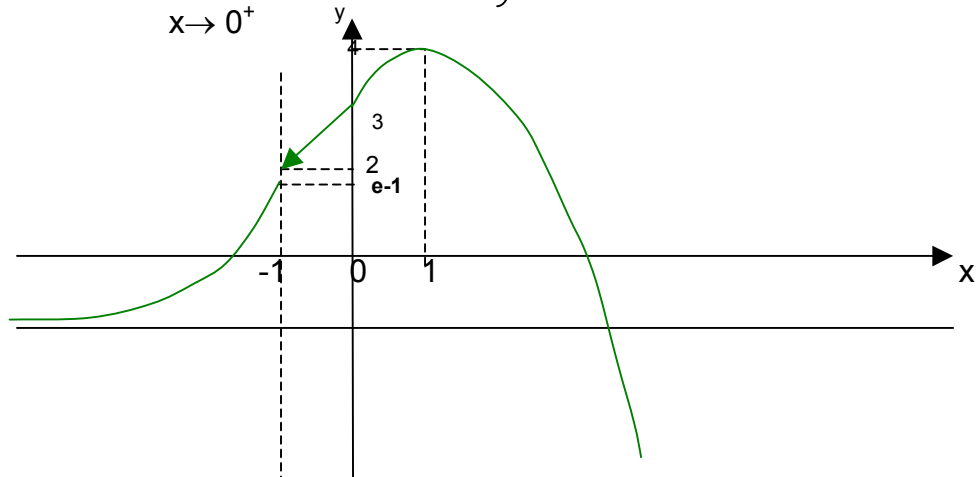
En este caso el conjunto de continuidad ha perdido el 0 respecto al dominio.

3) Sea $f : f(x) = \begin{cases} e^{x+2} - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x+3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ a) Estudiar cont. de f en -1 y en 0 .
b) Graficar f .



cont. en -1 : $f(-1) = e^{-1+2} - 1 = e - 1$
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} (e^{x+2} - 1) = e - 1$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+3) = 2$
 $\xrightarrow{\text{por def. cont.}} f$ no cont. en -1

cont. en 0 : $f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+3) = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2x + 3) = 3$
 $\xrightarrow{\text{por def. cont.}} f$ cont. en 0



EJERCICIO1: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones :

- a) $f : f(x) = e^x$ b) $f : f(x) = Lx$ c) $f : f(x) = |x|$
 d) $f : f(x) = \text{sg}(x)$. Puede definirse $\text{sg}(0)$ de modo que f sea cont. en 0?

EJERCICIO2:

$$\text{Sea } f : f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x \leq -1 \\ |x| - 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sqrt{x} - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estudiar cont. de f en -2 , -1 y en 0 .
 b) Graficar f .

¿Podría hacerse f continua en -2 si definiéramos $f(-2)$?

CONTINUIDAD LATERAL:

Def : f es cont. en a^+ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
 f es cont. en a^- $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Observación: De acuerdo a esta definición :

f es cont. en $a \Leftrightarrow f$ es cont. en a^- y f es cont. en a^+

CONTINUIDAD EN INTERVALOS :

Definiciones:

- 1) f es continua en $(a,b) \Leftrightarrow f$ es continua $\forall x \in (a,b)$
- 2) f es continua en $[a,b] \Leftrightarrow f$ es continua $\forall x \in (a,b)$,
 f es cont. en a^+
 y f es cont. en b^-

EJERCICIO3: Considerando la función del ejercicio 2, analiza continuidades laterales de ésta en 0. ¿es f continua en $(-1,0)$? ¿en $[-1,0]$? ¿y en $[0,1]$? Justifique respuestas.

OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS :

TEOREMAS DE CONTINUIDAD DE SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE :

- 1) Si f es continua en a y g es cont. en $a \Rightarrow f+g$ es cont. en a
- 2) Si f es continua en a y g es cont. en $a \Rightarrow f \cdot g$ es cont. en a
- 3) Si f es continua en a , g es cont. en a y $g(a) \neq 0 \Rightarrow f/g$ es cont. en a

Demostraremos 1) y los demás quedan a cargo del lector :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

$\lim_{x \rightarrow a}$ \downarrow $\lim_{x \rightarrow a}$ \downarrow \downarrow \downarrow \swarrow
 def. función suma $f(a)$ $g(a)$ por H y def. cont. por teo. lím. suma def. función suma

- EJERCICIO4:** a) Demostrar 2)y3) (teos.cont.producto y cociente)
 b) Sean : $f:f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $g:g(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
 ¿es continua f+g en 0? ¿son continuas f y g en 0?
 ¿vale el recíproco de los teoremas anteriores?
 c) si h es una función / h^2 es continua. ¿puede afirmarse que h es continua en a?

EJEMPLO: Estudiaremos la continuidad de la función: $f:f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{(x-7).L(x-5)}$

1) $\sqrt{x+3}$ es **continua** $\forall x > -3$ (continuidad de la función radical)
(continuidad del numerador)

2) $x-7$ cont. $\forall x \in \mathbb{R}$ (cont.func.polinómica)
 $L(x-5)$ es cont. $\forall x > 5$ (cont. func. logarítmica) } $\xrightarrow{\text{cont.del producto}}$ $(x-2)L(x-2)$
cont. $\forall x > 5$
(continuidad del denominador)

3) $(x-7).L(x-5) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 7$ y $x \neq 6$
(denominador no nulo)

de 1),2)y3)y por teo.cont.cociente \rightarrow **f es continua $\forall x > 5$, con $x \neq 6$ y $x \neq 7$**

EJERCICIO5: Estudiar continuidad de la función $f : f(x)=\frac{x^2 - 5x}{(e^{x+2} - 3)(L|x + 2|)}$

CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN COMPUESTA:

Si f es cont. en a }
 g es cont. en f(a) } \Rightarrow (g o f) cont. en a

Demostración: $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = g[f(a)] = (g \circ f)(a) \Rightarrow$ gof cont. en a
 (por cont.de g en f(a))
 \downarrow
 f(a) por cont. de f en a (H).

Ejemplo : Sea $f : f(x) = L(x^2-1)$

x^2-1 cont. $\forall x \in \mathbb{R}$ (cont.func.polinómica)
 $u = x^2-1 > 0 \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 $L u$ es cont. $\forall u > 0$ (cont. func. logarítmica)

cont. función compuesta

f cont. $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

TEOREMAS DE CONTINUIDAD:

TEOREMA DE BOLZANO:

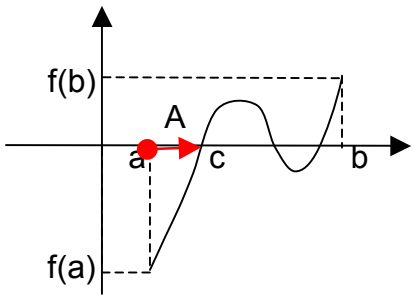
H f cont. en [a,b] , f(a).f(b)<0	T $\exists c \in (a,b) / f(c)=0$
--	--

Obs: El teorema **no asegura la unicidad de la raíz en (a,b)**

Demostración :

A efectos de la demostración supondremos $f(a)<0$ y $f(b)>0$

Consideramos un conjunto auxiliar : $A = \{x \in [a,b] / f(x) < 0\}$



La demostración consiste en ver que dicho conjunto tiene extremo superior y que éste es raíz de f en (a,b).

- * $A \subset \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$ (def.A)
- * A está acotado superiormente por b (def.A)

por axioma de continuidad.

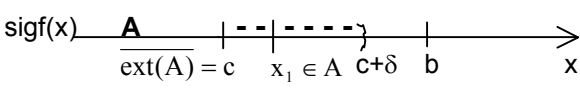
$\exists c = \overline{\text{ext}(A)}$, al ser a y b cotas inf. y sup. respect.de A $\rightarrow a \leq c \leq b$. (más adelante veremos que $c \neq a$ y $c \neq b$)

al ser f cont. en [a,b] por H

$\exists f(c) \in \mathbb{R}$ Probaremos que $f(c)=0$, suponiendo por absurdo $f(c)<0$ o $f(c)>0$

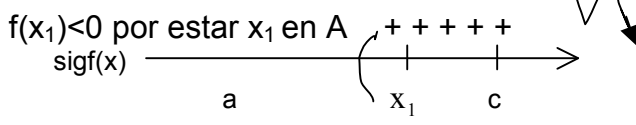
1) **Supongamos $f(c)<0$.** Si así fuera $c \neq b$ $\xrightarrow{\text{por Hip.}}$ f es cont. en c^+
 $\xrightarrow{\text{def. cont.}}$ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c) < 0$ $\xrightarrow{\text{teo. cons. signo}}$ $f(x) < 0 \forall x \in E_+(c, \delta)$

Tomando un $x_1 \in E_+(c, \delta) \cap [a,b]$ $\xrightarrow{\text{def. A}}$ x₁ ∈ A, pero x₁ > c = $\overline{\text{ext}(A)}$ lo cual es absurdo por def. de ext.



2) **Supongamos $f(c)>0$.** Si así fuera $c \neq a$ $\xrightarrow{\text{por Hip.}}$ f es cont. en c^-
 $\xrightarrow{\text{def. cont.}}$ $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) > 0$ $\xrightarrow{\text{teo. cons. signo}}$ $f(x) > 0 \forall x \in E_-(c, \delta)$

$\xrightarrow{\text{prop. ext}}$ $\exists x_1 \in E_-(c, \delta) \cap A \rightarrow f(x_1) > 0$ por estar x_1 en el semientorno $f(x_1) < 0$ por estar x_1 en A



$\rightarrow f(c) \neq 0$ y por tanto $c \neq b$.

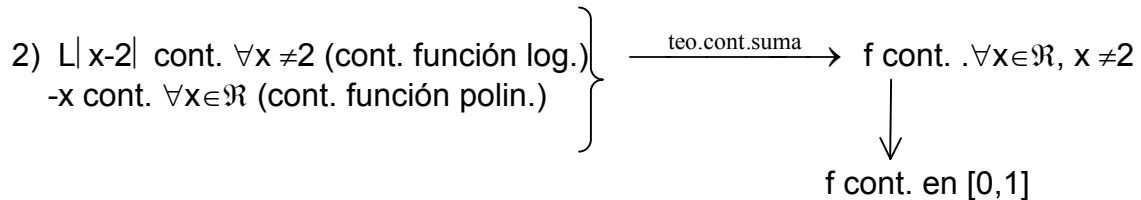
por 1 y 2 \rightarrow **f(c)=0 con $c \in (a,b)$**

EJEMPLO: Sea $f : f(x) = L|x-2| - x$

Demostrar que f tiene al menos una raíz en $(0,1)$

Aplicaremos el teorema de Bolzano:

1) $f(0) = L > 0$, $f(1) = -1 < 0$



$\xrightarrow{\text{de 1)y2) por teo. de Bolzano}} \exists c \in (0,1) / f(c) = 0$

EJERCICIO6:

Demostrar que $f : f(x) = e^{x-3} + x^2 - 16$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(3,4)$

EJERCICIO7:

Sea f / f es cont. en $[a,b]$, $f(a) < a$, $f(b) > b$.
 Demostrar que $\exists c \in (a,b) / f(c) = c$
 (se sugiere considerar la función $g/g(x) = f(x) - x$)

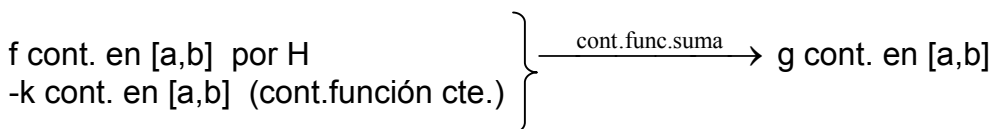
TEOREMA DE DARBOUX (aplicación de Bolzano)

H f cont. en $[a,b]$
 $f(a) < k < f(b)$, $k \in \mathbb{R}$

T $\exists c \in (a,b) / f(c) = k$

Demostración:

Tomaremos una función auxiliar $g : g(x) = f(x) - k$



$g(a) = f(a) - k < 0$ por H
 $g(b) = f(b) - k > 0$ por H

$\xrightarrow{\text{por teo. de Bolzano}} \exists c \in (a,b) / g(c) = 0 \rightarrow f(c) - k = 0 \rightarrow f(c) = k$