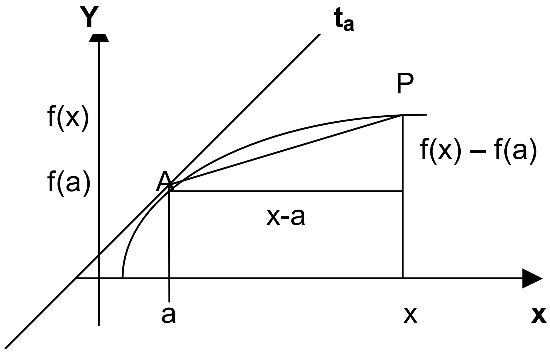
# DERIVABILIDAD-CURSO 6TO-MATEMÁTICA
SÍNTESIS TEÓRICO-PRÁCTICA PROF. SERGIO WEINBERGER




**INTRODUCCIÓN.**

Se considera una función f definida en un entorno de centro a, sea x perteneciente a dicho entorno.

A : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ le llamamos **"cociente incremental"** ("velocidad media").

Observemos que dicho cociente es la pendiente de la recta r, que pasa por los puntos A(a,f(a)) y P(x,f(x)).

**DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA DERIVADA.**

Si hacemos tender x al número a ($x \to a$),en ese caso $P \to A$, y la recta AP tenderá a la recta $t_a$, tangente a la gráfica de f en el punto (a,f(a)).
La pendiente de AP(cociente incremental o "velocidad media") entonces, tenderá a la pendiente de $\mathbf{t_a}$ **.** A dicho límite en caso de existir y ser finito le llamaremos :
**"derivada de f en a"** y la anotaremos : **f '(a)**, como vimos, ese número es **la pendiente de la recta $t_a$, tangente a la gráfica de f en el punto (a,f(a)).** (también "velocidad instantánea en a"). Es decir :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \quad \text{(si existe y es finito)}$$

Resumiendo:

**<u>DEFINICIÓN:</u>** Siendo f una función definida en a, diremos que ésta es **<u>derivable en a</u>** si y sólo si existe **y es finito** el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

A dicho límite le llamamos **derivada de f en a** y lo anotamos : **f '(a).**

## <u>Ecuación de la recta tangente</u>

Teniendo en cuenta que la ecuación de una recta que pasa por el punto $(x_A,y_A)$ y tiene pendiente "m" es : $y-y_A = m.(x-x_A)$ y la interpretación gráfica de la derivada, tenemos que:

**la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a,f(a)) es :**

$$y- f(a) = f'(a).(x-a)$$

Ejemplo : Sea f : f (x)= $x^2 - 2x + 3$. Calcularemos (si existen) e interpretaremos gráficamente : f ’(0), f ‘(1) y f ‘(2).

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 3 - 3}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x.(x-2)}{x} = \mathbf{-2 = f'(0)}$$

Desde el punto de vista gráfico, esto implica que la tangente a la gráfica de f en el punto (0,f(0)) ≡ (0,3), tiene pendiente -2.
Su ecuación es : $t_0$) y-3=-2.(x-0) o sea : $t_0$) y = -2x+3

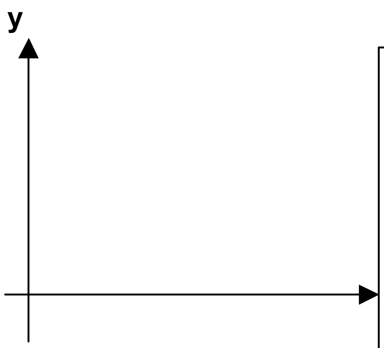
$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 3 - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x-1) = \mathbf{0 = f'(1)}$$

Por lo tanto, la recta tangente en el punto (1, f(1) ) ≡ (1, 2), <u>tiene pendiente 0, o sea es horizontal.</u>

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x + 3 - 3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x.(x-2)}{x-2} = \lim x = 2 = \mathbf{f'(2)}$$

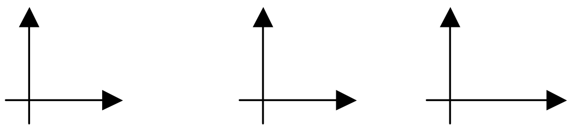
La tangente en (2,f(2))≡ (2,3) , tiene pendiente 2.
Su ecuación es : $t_2$) y-3 = 2.(x-2) o sea : $t_2$) y = 2x - 1

Grafiquemos f :




Observamos que:

Si f’(a) >0 → f es “estrictamente creciente en a” (f ↑ en a)
Si f’(a)<0 → f es “estrictamente decreciente en a” (f↓ en a)
Si f’(a)=0 → la gráfica de f tiene tangente horizontal en (a,f(a)).
Esto podría darse en los siguientes casos:



“mínimo relativo” “máx.relativo” “punto de inflexión”

Estos conceptos y teoremas los veremos con más rigor.

**FUNCIÓN DERIVADA :**

Lo anterior podría hacernos pensar en la utilidad de conocer la derivada en cada punto, calcularemos entonces f '(a), siendo a un valor cualquiera para el cual f es derivable. Lo haremos en el ejemplo que venimos trabajando :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-2x+3-(a^2-2a+3)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x^2-2x-a^2+2a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a).(x+a-2)}{x-a} = \lim_{x\to a} (x+a-2) = 2a-2$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **1** | **-2** | $-a^2+2a$ |
| a | | a | $+a^2-2a$ |
| | **1** | **a-2** | **0** |

Entonces f '(a) = 2a-2 , siendo a un valor cualquiera de x, escribiremos : **f '(x)= 2x-2** que es la relación de la **función derivada.**

Si estudiamos su signo, conoceremos el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función :

sig f '(x) - - - - - - - 0 + + + + + + + +
1

De acuerdo a lo visto esto significa que la función decrece hasta el 1, en 1 tiene un mínimo relativo de tangente horizontal (¡el vértice de la parábola!), y luego crece.

Más adelante construiremos una tabla de funciones derivadas, evitando el cálculo de un límite para obtener la función derivada.

Ejemplo: Hallemos la función derivada de f:f(x)= Lx con x>0

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{Lx-La}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{L(x/a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x/a)-1}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{a(x-a)} = 1/a$$

$\to$ **f '(x) = 1/x si x>0**

**NOTACIÓN :** Escribimos : (Lx)'=1/x si x>0

**EJERCICIO1 :i)** Hallar f '(x), aplicando la def. de derivada , siendo f:f (x) = $e^x$

**ii)** Sea f:f(x) = $2x^3+3x^2-12x-1$

- aplicando la def. de derivada, hallar f '(x).
- Estudiar el signo de f '(x) e interpretarlo gráficamente.
- Calcular $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ e interpretarlos gráficamente.

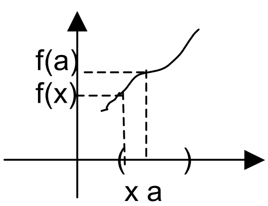
* Deducir el signo de f (x), aproximando las raíces con error<0,1

**CRECIMIENTO, MÁXIMO Y MÍNIMO RELATIVO.**

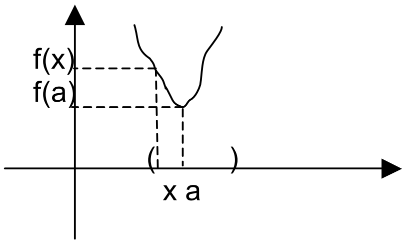
**DEFINICIONES:**

1) f es estrictamente creciente en a $\leftrightarrow$ $\exists$ E(a,δ) / $\forall x \in E^*_-(a,\delta) \to f(x)<f(a)$
(f ↑ en a )

$\forall x \in E^*_+(a,\delta) \to f(x)>f(a)$




2) f es estrictamente decreciente en a $\leftrightarrow$ …………………………………………………
(f ↓ en a ) ………………………………………………….
(completar definición y hacer figura)




3) f tiene un mínimo relativo en a $\leftrightarrow$ $\exists\ E(a,\delta)\ /\ \forall\, x \in E^{*}(a,\delta) \rightarrow f(x) \geq f(a)$

4) f tiene un máximo relativo en a $\leftrightarrow$ …………………………………………….

TEOREMA : si $f'(a)>0 \rightarrow f \uparrow$ en a

Demostración: por hipótesis y definición de derivada: $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > 0$

$$\xrightarrow{por.teo.cons.signo} \exists\ E(a,\delta)\ /\ \forall\, x \in E^{*}(a,\delta) \rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$

sea $x \in E^{*}_{-}(a,\delta)$, por lo anterior :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \\ x-a<0 \end{array}\right\} \xrightarrow{regla.designo} \begin{array}{c} f(x)-f(a)<0 \\ \downarrow \\ f(x)<f(a) \end{array}$$

si $x \in E^{*}_{+}(a,\delta) \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \\ x-a>0 \end{array}\right\} \xrightarrow{regla.designo} \begin{array}{c} f(x)-f(a)>0 \\ \downarrow \\ f(x)>f(a) \end{array}$$

$\xrightarrow{por.def}$ $f \uparrow$ en a

**EJERCICIO2** : Verdadero o Falso? ( si V : demostrar, si F: contraejemplo)

1) si $f'(a) < 0 \rightarrow f \downarrow$ en a
2) si $f \uparrow$ en a $\rightarrow f'(a)>0$
3) si f tiene un mínimo relativo en a $\rightarrow f'(a) = 0$
4) si f tiene un mínimo relativo en a y $\exists f'(a) \rightarrow f'(a) = 0$
5) si $f'(a) = 0 \rightarrow$ f tiene un máximo o un mínimo relativo en a.

## RELACIÓN CONTINUIDAD – DERIVABILIDAD/ PUNTOS SINGULARES

**Teorema** : si f es derivable en a $\Rightarrow$ f continua en a

Dem : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [f(x)-f(a)+f(a)] = \lim_{x\to a} \left[ \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} \underbrace{(x-a)}_{0} + f(a)\right] \overset{\text{teos.lím. suma y prod.}}{=} f(a)$

por H y def.deriv.

Por def $\rightarrow$ f continua en a

Teorema contrarrecíproco : **si f no es continua en a → f no es derivable en a**
(equivalente al anterior)

**Observación importante : El recíproco del teorema demostrado es falso :**
**Si f es continua → f es derivable es FALSO.**

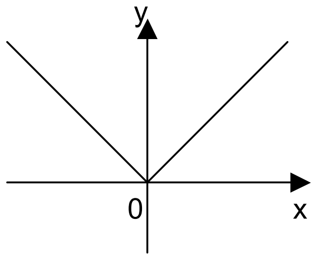
Veremos dos contraejemplos que demuestran esto :

1) Sea f : $f(x) = |x|$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim |x| \overset{\text{def.cont.}}{=} 0 = f(0) \quad \rightarrow \quad$ f es cont. en 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\overset{\uparrow<0}{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{(-x)}{x} = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \end{array}\right\} \overset{\text{def.deriv.}}{\rightarrow} \text{ f no deriv. en 0}$$

Los límites anteriores son las pendientes de las semitangentes en (0,f(0))

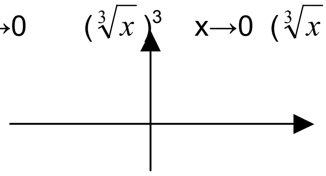



2) Sea $f:f(x) = \sqrt[3]{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} \overset{\text{def.cont.}}{=} 0 = f(0) \quad \rightarrow \quad$ f cont. en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$$

$\rightarrow$ f no es derivable en 0.



**Observación : la interpretación gráfica de que el límite del cociente incremental es : tangente vertical en (a,f(a)).**

## ESTUDIO DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD EN UN PUNTO :

De acuerdo a lo visto, podemos empezar estudiando la continuidad en a calculando (si existe) $\lim_{x \to a} f(x)$

$$\lim_{x\to a} f(x) \begin{cases} = f(a) \xrightarrow{def.cont.} f \text{ continua en a} \\ = \infty \text{ o no existe} \xrightarrow{def.cont.} f \text{ no cont. en a} \end{cases}$$

$$\text{Si f} \begin{cases} \text{No cont. en a} \xrightarrow{contrarr.teo.cont-deriv} f \text{ no derivable en a} \\ \text{Cont. en a} \rightarrow \text{debo estudiar derivabilidad.} \end{cases}$$

**Para estudiar derivabilidad en a**, aplico la def., por tanto debo calcular: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

En la práctica, en oportunidades el cálculo de ese límite supone calcular Ambos límites laterales : $\lim_{x\to a^{\pm}} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$, si ambos son iguales a un mismo **número** la función es derivable, siendo ese número f '(a).

**En caso de ser f cont. en a** ( si no es cont., ya no es derivable), los límites anteriores son iguales a los siguientes : $\lim_{x\to a^{\pm}} f'(x)$, los cuales en oportunidades son más fáciles de calcular.

**EJEMPLO:** Sea f . $f(x) = \begin{cases} Lx & \text{si } x > 1 \\ 2x-2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ e^{2x} & \text{si } x<0 \end{cases}$ Estudiaremos continuidad y derivabilidad de f en 0 y en 1.

en 1 :

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2(1)-2 = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x-2 = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} Lx = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{def.cont.} f \text{ es continua en a}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2 - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{Lx - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{def.deriv.} f \text{ no derivable en a}$$

**Observación :** Teniendo en cuenta que : (Lx) ' = 1/x ( deducción hecha en ejemplo) , y que (2x-2) ' = 2 ( deducción a cargo del lector), como se dijo anteriormente estos últimos límites, en virtud de que f es continua en a, pueden calcularse haciendo los límites laterales de f '(x) :

$\lim_{x\to 1^-} 2 = 2$

$\lim_{x\to 1^+} 1/x = 1$

Entonces vemos que estos límites dieron los mismos resultados calculados por este otro método que en este caso nos evitó las indeterminaciones.

Estos límites nos dan las pendientes de las semitangentes en $1^{\pm}$

En 0 :

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2.0-2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{2x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x-2) = -2 \end{array}\right\} \xrightarrow{def.cont.} \text{f no es continua (discontinua) en 0}$$

$$\Big\downarrow \text{ contrarrec.teo. cont.-deriv.}$$

f no es derivable en 0

**Observación :** Veremos que ocurre si estudiamos en 0 los $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f'(x)$

Tendremos en cuenta que $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, cuya deducción dejamos como ejercicio.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2e^{2x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$$

Esto indica que las semitangentes laterales en 0 tienen igual pendiente, sin embargo **al ser f discontinua, como ya vimos no es derivable**. En este caso, (de discontinuidad) **los límites de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ no dan iguales a los de $f'(x)$.**

**Por ello en este caso el hecho de ser iguales los $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f'(x)$, no implica derivabilidad en 0.**

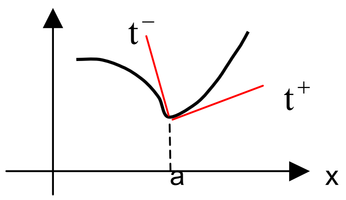
<u>**PUNTOS SINGULARES**</u> **:** A puntos <u>en los cuales la función es continua pero no derivable,</u> (como los casos anteriores), se les llama puntos singulares.

**Clasificación :**

**1)Puntos angulosos :** Son aquellos en los cuales :

$$\underbrace{\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{m_t^-} \neq \underbrace{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{m_t^+}$$

Estos dos límites son las pendientes de las semitangentes laterales en (a,f(a))

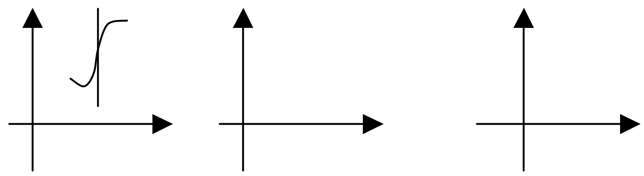



Obs: si f es continua en a, entonces :

$$\lim_{x\to a^{\pm}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^{\pm}} f'(x)$$

**2) Puntos de tangente vertical :** Son aquellos en los que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$



punto de inflexión de tangente vertical

puntos de retroceso

## OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES:

## DERIVADA DE UNA SUMA:

TEOREMA : $\left.\begin{array}{l}\text{Si } f \text{ es derivable en } a \\ \phantom{Si\ } g \text{ es derivable en } a\end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Demostración :

$$(f+g)'(a) \underset{\text{si } \exists}{=} \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \Big( \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\substack{\downarrow \\ f'(a) \\ \text{(por Hip.y def. de} \\ \text{derivabilidad)}}} + \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\substack{\downarrow \\ g'(a) \\ \text{(por hip.y def de} \\ \text{derivabilidad)}}} \Big) \underset{\text{lím suma)}}{\overset{\text{(por teo.de}}{=}} f'(a) + g'(a)$$

Observación : este teorema asegura que suma de funciones derivables en a, es una función también derivable en a.

## DERIVADA DEL PRODUCTO:

TEOREMA : Si f es derivable en a
g es derivable en a $\Bigg\} \Rightarrow \quad (f.g)'(a) = f'(a) \,.\, g(a) + f(a).g'(a)$

Demostración:

$$(f.g)'(a) \underset{\text{si } \exists}{=} \lim_{x\to a} \frac{(f.g)(x)-(f.g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x).\,g(x) - (\,f(a)\,.g(a)\,)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x).g(x) - f(a).g(x) + f(a).g(x) - f(a).g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{[\,f(x)-f(a)\,]}{x-a}}_{\substack{f'(a) \\ \text{(por Hip.y def. de} \\ \text{derivabilidad)}}} . \underbrace{g(x)}_{\substack{g(a) \\ \text{(por hip.g es deriv.en a} \xrightarrow{teo.cont-deriv.} \text{g cont en a)}}} + f(a).\underbrace{\frac{[g(x)-g(a)]}{x-a}}_{\substack{g'(a) \\ \text{(por hip.y def de} \\ \text{derivabilidad)}}} =$$

(teos.lím.suma y producto)

$$= f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$$

**EJERCICIO3:** Demostrar, aplicando la definición de derivada :

a) Si f es derivable en a
g es derivable en a
$g(a) \neq 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \quad (f/g)'(a) = \dfrac{f'(a).\,g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$

b) Si f es derivable en a, $k \in R \Rightarrow (k.f)'(a) = k.f'(a)$

## TABLA DE FUNCIONES DERIVADA:

| f(X) | f ’(X) | f(X) | f ’(X) |
|---|---|---|---|
| $k \in R$ | 0 | $\sqrt[3]{x}$ | $\frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$ |
| $k.x^n$ | $k.n.x^{n-1}$ | $\sqrt[3]{u(x)}$ | $\frac{1}{3.\sqrt[3]{(u(x))^2}}u'(x)$ |
| $k.[u(x)]^n$ | $k.n.[u(x)]^{n-1}.u'(x)$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $\lvert x \rvert$ | sig(x) | $e^{u(x)}$ | $e^{u(x)}.u'(x)$ |
| $\lvert u(x) \rvert$ | sig(u(x)).u’(x) | Lx | 1/x |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2.\sqrt{x}}$ | Lu(x) | $\frac{1}{u(x)}u'(x)$ |
| $\sqrt{u(x)}$ | $\frac{1}{2.\sqrt{u(x)}}.u'(x)$ | $L\lvert x \rvert$ | 1/x |
| | | $L\lvert u(x) \rvert$ | $\frac{1}{u(x)}u'(x)$ |
| sen(x) | cos(x) | sen u(x) | cos u(x). u’(x) |
| cos(x) | -sen(x) | tan(x) | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |

## OPERACIONES:

| f(x) | f ’(x) | f(x) | f ’(x) |
|---|---|---|---|
| u(x)+v(x) | u ’(x)+v ’(x) | u(x)/v(x) | $\frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$ |
| u (x).v (x) | u’(x).v(x)+u(x).v’(x) | k/v(x) | $\frac{-k.v'(x)}{[v(x)]^2}$ |
| k.v(x) | k.v’(x) | $L\frac{u(x)}{v(x)}$ | $\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{u(x).v(x)}$ |
| $u(x).e^{v(x)}$ | $[u'(x)+ u(x).v'(x)].e^{v(x)}$ | $L\left\lvert\frac{u(x)}{v(x)}\right\rvert$ | $\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{u(x).v(x)}$ |

## CONCAVIDAD-DERIVADA SEGUNDA.

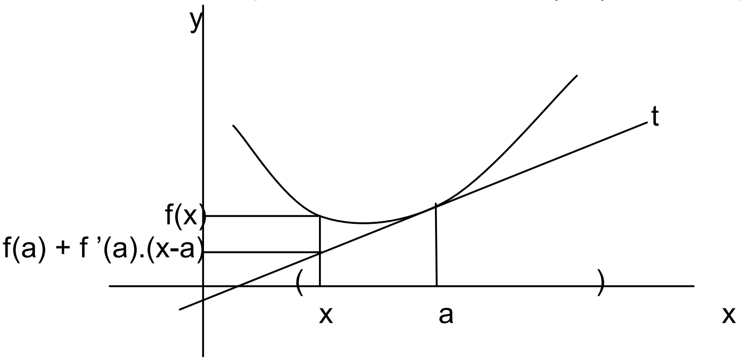
Sea f una función derivable en “a”. Recordamos que en este caso, la ecuación de la recta t ,tangente a la gráfica de f en el punto (a,f(a)) es:

**t) y = f(a) + f ’(a).(x-a)**

Diremos que f tiene concavidad positiva o negativa en “a”, según si en un entorno de a, la imagen f(x) de un x cualquiera del entorno es mayor o menor que la imagen de dicho x en la recta tangente t.

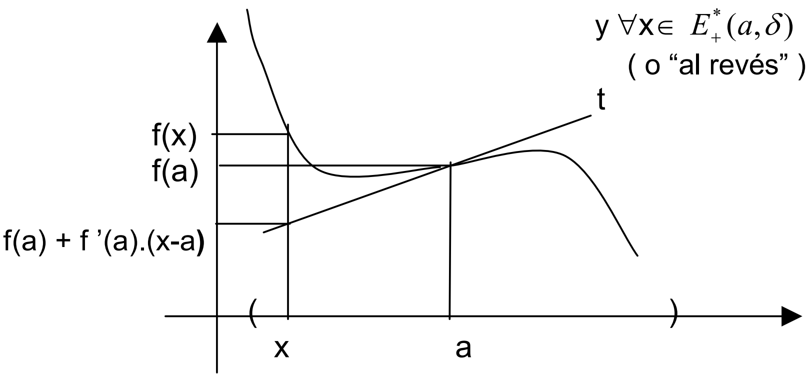
**CONCAVIDAD-DEFINICIONES:** Siendo f una función derivable en “a”, diremos que :

1) f tiene concavidad positiva en a $\Leftrightarrow$ $\exists$ $E^*(a,\delta)$ / $\forall x \in E^*(a,\delta) \rightarrow f(x) > f(a) + f'(a).(x-a)$




2) f tiene concavidad negativa en a $\Leftrightarrow$ $\exists$ $E^*(a,\delta)$ / $\forall x \in E^*(a,\delta) \rightarrow f(x) < f(a) + f'(a).(x-a)$

3) f tiene punto de inflexión en a $\Leftrightarrow$ $\exists$ $E^*(a,\delta)$ / $\forall x \in E^*_-(a,\delta) \rightarrow f(x) > f(a) + f'(a).(x-a)$
y $\forall x \in E^*_+(a,\delta) \rightarrow f(x) < f(a) + f'(a).(x-a)$
( o “al revés” )




**DERIVADA SEGUNDA :** Llamaremos función derivada segunda de f a aquella /

**f ”(x) = [ f’(x) ]’**

## TEOREMAS DE RELACIÓN CONCAVIDAD-DERIVADA SEGUNDA:

1) si f "(a) > 0 $\Rightarrow$ f tiene concavidad positiva en a.

2) si f "(a) < 0 $\Rightarrow$ f tiene concavidad negativa en a.

3) Si sig f "(x) $\xrightarrow[\quad a \quad]{(\;++++\;\;----\;)}$ x
   (f " cambia de signo en a)
   f ' continua en a
   $\Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en a

Esto nos permite **con el signo de la derivada segunda, determinar concavidad y puntos de inflexión de f.**

## TEOREMA DE ROLLE:

**H**

**f continua en [a,b]**
**f derivable en (a,b)**
**f(a)=f(b)**

**T**

**$\exists c \in (a,b)$ / f '(c)=0**
**( existe en el intervalo un punto de tangente horizontal ; el teorema no asegura la unicidad).**

**Figura1**

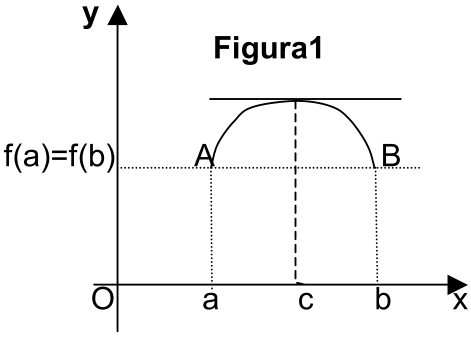
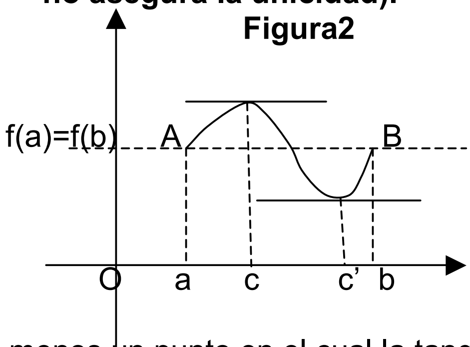



**Figura2**

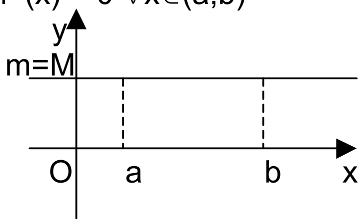



Siendo A(a.f(a)) y B(b,f(b)), existirá al menos un punto en el cual la tangente sea // AB (en este caso horizontal)

<u>Demostración:</u>

Por H f cont. en [a,b] $\xrightarrow{\text{teo.W 2}}$ $\exists$ máximo y mínimo absolutos (M y m ) de f en [a,b], $m \leq M$

1) si m=M , como además $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow m=f(x)=M \ \forall x \in [a,b]$
es decir que en este caso f es constante en [a,b], entonces:
$f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$




2) si m < M consideremos a $x_1$ y $x_2 \in [a,b]$ / $f(x_1)=m$ y $f(x_2)=M$
como $m=f(x_1)< f(x_2)=M$
por H : $f(a)=f(b)$
$\Rightarrow x_1$ y $x_2$ no pueden coincidir ambos con a o b (sería m=M), de modo que uno de los dos $\in$ (a,b)

Supongamos que sea $x_2 \in (a,b)$ (como en la figura 1)
Existirá entonces un $E(x_2,\delta) \subset [a,b]$
Además $f(x_2)=M$ es máximo absoluto de f en [a,b]
$\Rightarrow f(x) \leq f(x_2) \ \forall x \in [a,b]$

$\xrightarrow{\text{def.máx.relativo}}$ f presenta un máx.relativo en $x_2$
$x_2 \in (a,b) \xrightarrow{\text{por.H}}$ f deriv.en $x_2$
$\xrightarrow{\text{teo.anterior}}$ $f'(x_2)=0$ con $x_2 \in (a,b)$

**EJERCICIO:** Sea $f : f(x) = L(-x^2 + ex + 1)$

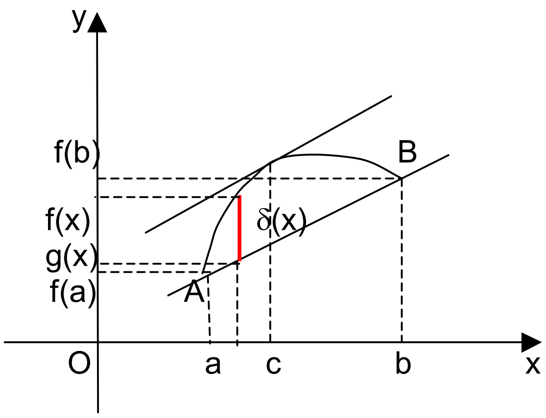
a) Investigar si $\exists c \in (1, e-1)$ tal que la gráfica de f en el punto (c,f(c)) presente tangente horizontal. Fundamentar.
b) Hallar c de la parte a) y graficar f en el intervalo [1,e-1]

**TEOREMA DE LAGRANGE:**

H **f continua en [a,b]**

**f derivable en (a,b)**

T **$\exists c \in (a,b)$ / f '(c)=**$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$




f '(c) expresa la pendiente de la tangente a la gráfica de f en un punto (c,f(c)), mientras que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta AB. El teorema expresa, al igual que Rolle, que existe un punto en el cual la tangente es paralela a la recta AB. De modo que Lagrange es una generalización de Rolle.

Demostración:

Consideremos una función g auxiliar, cuya gráfica es la recta AB :

$$g : g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

.....y otra que expresa la diferencia entre f y g (función dada y recta AB):

Veremos que es posible aplicar el teorema de Rolle a la función $\delta$ :

$$\left.\begin{array}{l}\text{f es cont. en [a,b] y derivable en (a,b) por H} \\ \text{g es cont. y derivable } \forall x \in \Re \text{ por ser polinómica (lineal)}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{teos.cont.yderiv.suma}} \begin{array}{l}\delta \text{ cont. en [a,b] y} \\ \text{derivable en (a,b)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\delta(a)= & f(a)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0 \\ \delta(b)= & f(b)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \delta(a)=\delta(b)$$

$$\xrightarrow{\text{por.teo.Rolle}} \quad \exists c\in(a,b)/\delta'(c)=0$$

Siendo $\delta'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \delta'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

$$\Rightarrow \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

**ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE LAGRANGE:**

**TEOREMAS:**

**1)** $\left.\begin{array}{l}\text{Si } f'(x)>0 \text{ en } (a,b) \\ f \text{ cont.en } [a,b]\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en [a,b]

Demostración : Sean $x_1,x_2\in[a,b]$ cualesquiera, con $x_1<x_2$,

Tenemos que demostrar que $f(x_1)<f(x_2)$.

Para ello aplicaremos a f el teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1,x_2]$,

Como dicho intervalo está incluido en el [a,b]:

f es cont. en $[x_1,x_2]$y deriv. en $(x_1,x_2)$ por. H

$\Downarrow$ por teo de Lagrange

$$\left.\begin{array}{l}\exists c\in(x_1,x_2)/f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0 \text{ por H} \\ \text{como además :} \quad x_2-x_1>0\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{regla.sig.}} \quad f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1) \text{lqqd.}$$

**2)** $\left.\begin{array}{l}\text{Si } f'(x)=0 \text{ en } (a,b)\\ f \text{ cont.en } [a,b]\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ f es constante (f(x)=k) en [a,b]

Demostración :

Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ cualesquiera, con $x_1 < x_2$,

Tenemos que demostrar que $f(x_1)=f(x_2)$.

Para ello aplicaremos a f el teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1, x_2]$,

Como dicho intervalo está incluido en el [a,b]:

f es cont. en $[x_1, x_2]$ y deriv. en $(x_1, x_2)$ por. H

$\Downarrow$ por teo de Lagrange

$$\left.\begin{array}{l}\exists c \in (x_1, x_2) / f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \text{ por H}\\ \text{como además :} \quad x_2 - x_1 > 0\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \; f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$ lqqd.

**3)** $\left.\begin{array}{l}\text{Si } f'(x)=g'(x) \text{ en } (a,b)\\ f \text{ y } g \text{ cont.en } [a,b]\end{array}\right\}$ $\Rightarrow f-g$ es constante (f(x)=g(x)+k) en [a,b]

Para demostrar este teorema basta con aplicar el anterior a la función f-g

**PRIMITIVA (INTEGRAL INDEFINIDA):**

Si f y F son funciones tales que : $F'(x)=f(x)$ ,
se dice que **F es primitiva o integral indefinida de f.** Por el teorema anterior, cualquier otra primitiva de f difiere de F en una constante, de modo que el conjunto de primitivas de f son : F(x)+k, con k∈R, se escribe :

**F(x) =** $\int f(x)dx$

## 4) CONDICIÓN SUFICIENTE DE EXTREMO RELATIVO:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sig} f'(x)\ \ (+ + + + \mid\ - - -) \longrightarrow \\ \qquad a-\delta \qquad a \qquad a+\delta \quad x \\ f \text{ cont. en } a \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f tiene un máx. relativo en a}$$

Demostración :

Sea $x_1 \in E_{-}^{*}(a,\delta)$, probaremos que $f(x_1) < f(a)$
aplicando Lagrange en el intervalo $[x_1, a]$:

**f es derivable en** $(x_1, a)$ pues en este intervalo (incluido en $E_{-}^{*}(a,\delta)$) :
**f '(x)>0** por H

f es derivable en $[x_1, a)$ por lo mismo $\xrightarrow{\text{teo.deriv-cont.}}$ f es cont. en $[x_1, a)$
por H f cont en a
$\Downarrow$
**f cont. en** $[x_1, a]$

$\xrightarrow{\text{por.teo.de Lagrange}}$ $\exists c \in (x_1, a) / f'(c) = \dfrac{f(a) - f(x_1)}{a - x_1} > 0$ por H

como además : $x_2 - x_1 > 0$

$\xrightarrow{\text{regla.sig.}}$ $f(a) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(a) > f(x_1)$ lqqd.

De igual forma, tomando un $x_2 \in E_{+}^{*}(a,\delta)$, puede probarse que $f(x_2) < f(a)$
aplicando Lagrange en el intervalo $[a, x_2]$:

$\xrightarrow{\text{por.def.máx.relativo.}}$ f tiene máx. relativo en a.