Práctico Nº 2

1) Hallar x, y, z para que $A = B$

$$A=\begin{pmatrix} 2x+3y & 8 \\ -5x+4z & 2y \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} z+4 & 8 \\ 2y-3 & x+z \end{pmatrix}$$

2) Hallar los productos A.B y BA:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Hallar Todas las matrices B tal que A.B = O y B.A = O

(sug.: Deduzca el orden de la matriz B y asigne letras a sus incógnitas).

4) Cacular AB - BA

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^2 y A^3. ¿Quién será A^n? Demostrar por I.C.

6) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^2 A^3 y A^4 ?¿Quién será A^n? Demostrar por I.C.

7) ¿Serán ciertas las igualdades $(A+B)^2 = A^2 + 2.A.B + B^2$ y $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$?

(sug.: pruebe con algunos ejemplos)

8) a) Enuncie la propiedad Hankeliana.

b) Dadas las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que A.B = O

c) ¿Las matrices verifican la propiedad Hankeliana?

9) Dado el siguiente teorema:

Una matriz A de orden 2x2 conmuta con cualquier otra matriz del mismo orden si y solo si conmuta con dada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar todas las matrices de orden 2x2 que conmutan con cualquier otra.

10) Probar que para toda matriz A_{mxm} se cumple:

i. $(A^t)^t = A$ ii. $(cA)^t = c(A^t)$ iii. $(A+B)^t = A^t + B^t$

11)(A)Sea A una matriz de orden 2x2. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Encontrar una matriz B, tal que:

a) $B.A=\begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ b) $B.A=\begin{pmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

c) $B.A=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ d) $B.A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11}+a_{21} & \alpha a_{12}+a_{22} \end{pmatrix}$

(B) Sea la matriz A:

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

Se le aplican las siguientes transformaciones elementales:

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Indicar cada una de las transformaciones aplicadas.

b) En cada paso, encontrar la matriz por la cual debemos multiplicar a cada una para obtener la siguiente.

(*Si en el razonamiento realizamos:* $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow I$
Encuentre B_1 *tal que* $B_1 . A = A_1$ *y asi sucesivamente)*

c) Deducir la matriz que al multiplicar por A obtenemos la identidad.

(Sug: utilice $B_{1,} B_{2,} B_3\, y\, B_4$)

(C) Halle la matriz inversa de J:

$J=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

12) Hallar los inversos de cada una de las siguientes matrices

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

13) Resolver las siguientes ecuaciones. Con A y B las del ejercicio 12

a) AX = B b) XA = B

c) $AXA^{-1} = B$ d) X.A.B = 2A+3B

14) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el ejercicio 12:

$$\begin{cases} x-y-z=4 \\ 2x-2y-6z=3 \\ -x+z=0 \end{cases}$$

15) Sean

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar las inversas de A y B.

b) Calcular A.B y deducir la inversa de A.B operando con A^{-1} y B^{-1}