Práctico Nº 3 - Determinantes

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 4\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 8 & 2 & 6\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}-6 & -2 & 3\\ 5 & -1 & -2\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

   i) Calcular utilizando la definición sus determinantes.
   ii) Verificar los resultados desarrollando por los elementos de una línea los determinantes de C, D y E.
   iii) Utilizar convenientemente las propiedades de determinantes para hacer aparecer ceros y volver a verificar los resultados anteriores para C, D y E .

2. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{a)}\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}\quad \text{b)}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1 & -3\\ -5 & -1 & -3 & -5\\ -3 & -1 & 2 & 1\end{vmatrix}\quad \text{c)}\begin{vmatrix}-4 & b-4 & a+1 & b\\ 3 & 3 & 1 & 0\\ -8 & b-8 & a & b\\ 5 & 3 & x & 3\end{vmatrix}\quad d)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 1 & 2 & & n-1\\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

3. Resolver:

$$a)\begin{vmatrix}2+x & 3-x & 1+8x\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\qquad \text{b)}\begin{vmatrix}x+2 & x+7 & x+6\\ x+9 & x+5 & x+1\\ x+4 & x+3 & x+8\end{vmatrix}=0\qquad \text{c)}\begin{vmatrix}x & x+4 & 1\\ x-1 & 2x & 2\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$d)\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & x & 0\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=x+2\qquad \text{e)}\begin{vmatrix}x-1 & 2 & x+1\\ 1 & x+1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=x^2-1\qquad f)\begin{vmatrix}x^4+7 & x^4-1 & x^4+1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=119$$

$$g)\begin{vmatrix}x^2-1 & 2x-2 & 3x-3\\ 2x & 4x & 0\\ 0 & 12-4x & x-3\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}x-1 & 2 & 3\\ -1 & x-2 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\qquad \text{h)}\begin{vmatrix}1 & \text{x} & 3 & \text{x-3}\\ 0 & \text{x}^2-1 & 0 & 1\\ 0 & \text{x}^2-2x+1 & 3 & 0\\ -1 & -1 & -2 & 3\end{vmatrix}=0$$

4. Si $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1$. Calcular:

$$\begin{vmatrix}2x & 2y & 2z\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\qquad \begin{vmatrix}x & y & z\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}\qquad \begin{vmatrix}3x-3 & 3y & 3z-2\\ 3 & 0 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix}\qquad \begin{vmatrix}x & y & z\\ 2x+3 & 2y & 2z+2\\ x+1 & y+1 & z+1\end{vmatrix}$$

5. Demostrar que

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$ (sug: sustituya la columna 2, por ella menos la columna 1.....)

6. Demostrar sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 16 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 2a & 0 \\ 2a & 0 & 3b \\ 4a & 3b & 6b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 \\ b & b & -b & b \\ c & b+c+1 & -1 & -b \\ d & 3 & 2 & d-5 \end{vmatrix}$

7. Hallar los valores de x e y que hacen que:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1+y+a & x+3 & 2 \\ 2y & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

8. Demostrar o citar un contraejemplo en cada una de las siguientes proposiciones:

$|A + B| = |A| + |B|$ $\qquad$ $|(A + B)^2| = |A+B|^2$

$|(A + B)(A-B)| = |A^2-B^2|$ $\qquad$ $|AB|+|BA| = 2.\ |AB|$

9. Hallar las inversas de la matrices A y C del ejercicio 1, utilizando determinantes y adjuntos.

10. Resolver los siguientes sistemas utilizando el método de Cramer y escalerizando si es necesario:

$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 6x+z=1 \\ 2y-3z=4 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} -3x-y-z=5 \\ 6x+2y+2z=-10 \\ x+6y+2z=0 \end{cases}$

11. Resolver y discutir según m, m$\in\Re$, los siguientes sistemas:

$\begin{cases} 2(m+1)x+(m+3)y=1 \\ -4x-my=-m \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2mx-4y=m \\ (m-3)x+(m-1)y=-3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} (m^2-4)x+(10m+20)y=0 \\ (m-3)x-2(3-m)y=m^2-9 \end{cases}$

$\begin{cases} mx-y=m-2 \\ -4(m-1)x+m(m-1)y=0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} (m^2+3m)x+(2m+6)y=2m \\ mx+(m+1)y=m \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} (m+3)x+3(m+3)y=m \\ (m^2-m)x+(4m-1)my=6m \end{cases}$

$\begin{cases} x+my+z=1 \\ (1-2m)y-3z=1 \\ (1-3m)y-(m+3)z=1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x+y+z=2m \\ x-y+z=-2m \\ mx+y+2z=m^2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} (m+2)x-y+2z=3 \\ m^2x-2y+4z=m \\ (m+7)x+3y-6z=-9 \end{cases}$

12. Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 2-x & -3x & x-x^2+4 \\ 2x-4 & 4x & x+3 \\ x-2 & 3x & x^2 \end{pmatrix}$$

i. Hallar los posibles valores de x que hacen que A no tenga inversa.

ii. Para el menor valor de x hallado en “i”, encontrar todas las matrices X / **A.X =** $\begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$

13. Si A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

i. Hallar A^{-1} y resolver $X\,.\,A^2=B$ sin hallar “directamente” la inversa de A^2

ii. Pruebe que A^3B^5 tiene inversa, sin calcularla.

14. Sea A = $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2k & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar k para que A no tenga inversa.

b) Para el valor de k hallado: ¿tiene inversa 3A? ¿ y A^2 ? ¿y A^t ? Justifique.

c) Resolver XA = B con B = $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 60 \end{pmatrix}$ para el valor de k hallado.