Práctico Nº 11

1. Se dan las rectas r) $3x + y = 0$ y r') $x – 2y = 0$. Se consideran las rectas variables paralelas a $y = - x$; las que cortan a r y r' en R y R' respectivamente. Por R se traza la paralela a la recta $y = x$ (t). Por R' la paralela a la recta $y = 2x$ (t'). Hallar el L.G. de **I**; con $t \cap t' = \{I\}$.

2. i) Se consideran el punto A, variable sobre ox, y B de coordenadas (0,3). Hallar el lugar geométrico de P, siendo P la intersección de la mediatriz de AB con la paralela a oy por A.
   ii) Se consideran las tangentes al lugar hallado trazadas desde el origen, (*t* y *t'*). Comprobar analíticamente que son perpendiculares entre sí.

3. Dados los puntos P(1,2) y N(0,1/2). Se traza la recta *r* variable por N y la recta *p* perpendicular a *r* por *p*. Q es la intersección de *p* con ox. Hallar el lugar geométrico de L; siendo L la intersección de *r* con la paralela a oy por Q. Reconocer y dar elementos.

4. Se considera una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 – 2x + 4y + 1 = 0$; C es su centro, P un punto perteneciente a dicha circunferencia. La recta *r* es mediatriz de CP. Siendo A(2,0) y *r'* la recta paralela a *r* por A. Hallar el L.G. del punto I al variar P. $\{I\}=r' \cap CP$.

5. Se considera el punto variable K, sobre la recta $y = -x$.
   i) Hallar la ecuación de la circunferencia determinada por O(0,0), P(1,1) y K.
   ii) Si la perpendicular por el origen a la recta PK corta a la circunferencia en M. Hallar el Lugar geométrico de M, reconocerlo.

6. Sean dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$' de centros C(0,1) y C'(0,2) que pasan por el origen; y una recta variable *r* por el origen que corta a las circunferencias en M y M' respectivamente. Sea *r'* la mediatriz de MM'.
   a) Probar que *r'* pasa por un punto fijo.
   b) Hallar el lugar geométrico de $r' \cap CM$.
   c) Hallar el L.G. de $r' \cap C'M'$.
   d) Reconocer y hallar elementos.

7. Dada la cfa. de centro en (0,0) y radio 2, y un punto T, variable perteneciente a la misma. Hallar el lugar geométrico de la intersección de OT con la paralela a oy trazada por C, siendo C la intersección de la tangente a la cfa. por T con el eje ox.

8. i. Sea $\mathcal{P}$ la parábola de ecuación $y = 2x^2 – x + 8$; y J un punto variable perteneciente a ella. Q y R son las proyecciones de J sobre los ejes ox y oy, respectivamente. Hallar el L.G. del punto medio de QR. Reconocer e informar elementos.
   ii. Sea ahora la recta *r* que pasa por Q, y por B(0,1). Hallar el L.G. de $OJ \cap r$. Reconocer.
   iii. Representar la zona del plano cuyos puntos verifican: $\begin{cases} x^2+y^2-8 \le 0 \\ x^2-y^2-4x+4y \le 0 \end{cases}$

9. Sean los puntos A(-1,0) y B (0,3), las rectas *r*, *s* y *t*; tales que: *r)* $y = x$; *s)* $y = -x$; y *t* // oy, variable. Siendo los puntos P y Q tales que: $r \cap t=\{P\}$, y $s \cap t = \{Q\}$.
   i) Hallar el lugar geométrico del punto I / $\{I\}= AP \cap BQ$, reconocer.
   ii) Hallar el área del triángulo POQ e indicar cuáles deben ser las coordenadas de P y Q, para que el área sea de 16 unidades; y que P pertenezca al primer cuadrante.
   iii)Se considera ahora el punto M variable sobre PQ, (P y Q hallados en ii), si *d* es la polar de M respecto al lugar geométrico hallado en i, y *e* es paralela a la recta de ecuación: $4x – 2y + 3 = 0$, por M. Hallar el lugar geométrico del punto D: $\{D\}= d \cap e$. Reconocer.

10. i) Sea la circunferencia $\mathcal{C}$ de ecuación; $\mathcal{C}$) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$, de centro C; y los puntos: A(2,-2), y B(2,2). Probar que los ángulos que determinan las rectas IA e IB, son constantes. Siendo I, un punto variable sobre $\mathcal{C}$.
   ii) Siendo t una recta variable de ecuación $y = \lambda$; y r la recta tangente a la cfa., trazada desde D(-4,0), (de coeficiente angular positivo).
   Hallar las coordenadas de P (en función de λ)/ $\{P\}= r\cap t$.
   iii)Se considera R, la proyección de P sobre Ox, y Q:$\{Q\}= r\cap \mathcal{C}$.
   Hallar el L.G. de I / $\{I\}= RQ\cap PC$. Reconocer.

11. (A) i. Halle el lugar geométrico de los puntos del plano cuya potencia a la circunferencia $\mathcal{C}$ es igual a 3; siendo $\mathcal{C}$) $x^2+y^2-2x-4y=0$. Observe que dicho lugar es una circunferencia ($\mathcal{C}$') y de elementos.
   ii. Sea r una recta de ecuación $y = ax$. Considere la circunferencia $\mathcal{C}$'' tal que el eje radical entre $\mathcal{C}$' y $\mathcal{C}$'' es r, y su centro pertenece a s : s) $y = ½$.
   iii. Halle el Lugar geométrico del polo de r respecto de $\mathcal{C}$'' al variar a. ($a\in\Re$). Reconocer.

   (B) Represente el conjunto de puntos del plano que verifican: $\begin{cases} x^2+y^2\geq 6x \\ x\leq y^2+6 \\ y\geq x-6 \end{cases}$

12. i. Probar que las tangentes trazadas desde el punto A, intersección de la directriz con el eje de la parábola $\mathcal{P}$ de ecuación $y= ax^2$ son perpendiculares. (a>0)
   ii. Halle el área del triángulo determinado por A y los puntos de tangencia.
   iii. Halle la ecuación de $\mathcal{P}$ para que dicha área sea 4.

13. A) Se considera un punto P perteneciente a la recta r de ecuación x = 1
   i) Halla la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ que es tangente a r en P y pasa por O.
   ii) Siendo P variable, halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias $\mathcal{C}$. Reconocer y mencionar elementos.
   B) Representa el conjunto de puntos del plano que verifican:
   $$\begin{cases} x^2+y^2\geq 29 \\ 4x-y-3\leq 0 \\ y\leq x^2+1 \end{cases}$$
   C) Resuelve discutiendo según λ
   $$\begin{cases} (\lambda-1)x+(\lambda^2-1)y=\lambda-5 \\ \lambda x-2\lambda^2 y=\lambda-1 \end{cases}$$

14. A)Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
   i) Prueba que A y B son invertibles
   ii) Resuelve la ecuación $AX-B^{-1}=2A-B^2$
   B) Sea $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ P el conjunto cuyos elementos son las columnas de $M+M^t$
   y C el conjunto cuyos elementos son las columnas de $M-M^t$
   i) Verifica que P genera $\mathbb{R}^3$ y que C es un conjunto linealmente dependiente
   ii) Halla todos los vectores $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ que son ortogonales simultaneamente a los tres vectores de C.
   iii)¿Cuántos vectores de la parte anterior tienen norma 2? ¿Cuáles son?

15. A) Dados los puntos A(0,4) y B(2,0)

i) Hallar la ecuación de las circunferencias $\mathcal{C}$ tal que A $\in$ $\mathcal{C}$ y B $\in$ $\mathcal{C}$.

ii)Determinar la ecuación de la tangente (t) a $\mathcal{C}$ en A.

iii) $t \cap ox = \{P\}$, r es paralela a oy por P y s es perpendicular a t por O. Halle el L.G. de I, si I : $\{I\} = r \cap s$. Reconocer

16. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

a) Hallar X / A^t.X + C = B

b) Hallar M / A^t.M = $A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 8 & -7 \\ 4 & -22 \end{pmatrix}$

17. i) Resolver y discutir según el parámetro:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + (m-1)z = 2 \\ (-m-1)x + (m^2 - 2\text{m})y + (m-1)z = -2\text{m} + 6 \\ (m+1)x + m^{2\text{y}} + (-m^2 + 3\text{m} - 2)z = -5\text{m} + 7 \end{cases}$$

ii) Se considera la Cfa. ($\mathcal{C}$) que pasa por: P(0,5), E(-3,-3) y O(0,0). Sea r una recta variable por P que corta a $\mathcal{C}$ en P y K.

a) Demostrar que la mediatriz del segmento PK pasa por un punto fijo. Determinarlo.

b) L.G. del punto medio del segmento OK. Reconocer y hallar elementos.

18. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro C(2,3) tangente a Oy. Una recta variable r) y = mx corta a $\mathcal{C}$ en A y B.

i) Hallar en función de m, la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}'$ que pasa por A, B y D(5,2).

ii)Probar que la familia de circunferencias C' forman haz cuando m varía. Hallar coordenadas de los puntos base, y ecuación del eje radical.

iii) Sea p la polar del origen respecto de C'. Hallar la ecuación del L.G. del punto L : {L}= p$\cap$r. Reconocer.

19. Sea $\mathcal{C}$ la cfa. de ecuación $x^2 + y^2 = 16$, t es una tangente variable que interseca a los ejes Ox y Oy en P y Q respectivamente. Sea C_i la circunferencia circunscrita al triángulo OPQ y r_i el eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_i$. r_i corta a Ox y Oy en A_i y B_i respectivamente. Se pide:

i) L.G. del punto medio (M) de A_iB_i.

ii) Sea el punto T:{T} = OM$\cap t_i$ y C_j la circunferencia circunscrita al OPT. Hallar la ecuación de C_j y probar que forman haz, indicando puntos base y eje radical del mismo.

20. Sean A(3,0) y B(0,2), C la cfa. de centro B y tangente a Ox, y C' una cfa. variable tangente a Ox en A.

i) Demostrar que el eje radical (e) de C y C' pasa por un punto fijo S que se determinará.

ii) Sea r la recta determinada por los centros B y B' de C y C' y s la polar de S respecto de C'. Hallar la ecuación del L.G. del punto L:{L}=r$\cap$s. Reconocer.

iii) L.G. de I : {I}=e$\cap$s.

21. Se considera el haz de cfas. cuyos puntos base son O(0,0) y A(0,2).

i) Hallar la ecuación del haz. Hallar la cfa C del haz cuyo radio es $\sqrt{5}$, tal que su centro C tenga abscisa positiva.

ii) Determinar los puntos del eje central del haz tales que su potencia respecto de C vale –1.

22. A) Deducir la ecuación del lugar geométrico de puntos del plano, cuya distancia a T(1,1) es el doble, que la distancia a la recta x + y = 0

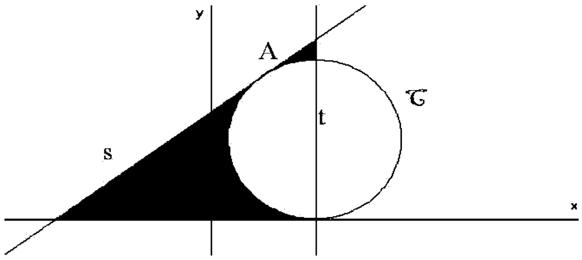
B) Represente en un sistema de ejes:

$$\begin{cases} x^2+y^2+18x-6y\leq 0 \\ x+9\geq 0 \\ y^2-x-6y\geq 0 \end{cases}$$

C) Sea el punto P(k,k), la cfa $\mathcal{C}$) $x^2+y^2-18x+60=0$, p la polar de P respecto de $\mathcal{C}$ y s la paralela a x + y = 0 que pasa por P. Deducir la ecuación del L.G. del punto que pertenece a $p\cap s$ Reconocer.

23. A) Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia tangente a la recta s en el punto A(3,9) y al eje x en un punto perteneciente a la recta t, siendo t) x – 6 = 0

1. Halle la ecuación de la cfa $\mathcal{C}$.
2. Encuentre un sistema de inecuaciones, cuya solución sea la región indicada.



B) Si r) x = 3 y s) x – y + 5 = 0. $\{P\}=r\cap s$

Sin utilizar las coordenadas del punto P se pide:

a) Escribir la ecuación del haz de rectas determinado por r y s:

b) Hallar la ecuación de la recta del haz que es ortogonal al vector [2,3].

c) Probar que existe una recta del haz, que pasa por los puntos en común entre:

$\mathcal{C}$) $x^2+y^2-3x+3y-2=0$ $\mathcal{C}'$) $x^2+y^2+5x+y-10=0$

(admitiendo que $\#(C\cap C')=2$)

d) ¿Es la potencia de P respecto de $\mathcal{C}$ igual a la potencia de P respecto de $\mathcal{C}'$? Justifique.

24. A) a) Escribir la ecuación del haz de rectas paralelas a: x + y + 5 = 0

b) Deducir la(s) ecuacion(es) de la(s) recta(s) del conjunto anterior que cumple(n):

i. La distancia al origen es $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

ii. Son tangentes a C) $x^2+y^2-4x=0$

B) Se considera la cfa de ecuación: C) $x^2+y^2+mx-6y=0$

a) Halle la ecuación de la tangente a C en el punto de corte de la cfa con el eje ox; distinto del origen.

b) Deducir la ecuación del lugar geométrico del punto en común entre la tangente hallada y la recta de ecuación y = 2x+m al variar m. Reconocer.

25.

A) Se considera el haz de circunferencias C) $x^2 + y^2 + (2\lambda - 2)x + (4 - \lambda)y + 5 - 4\lambda = 0$

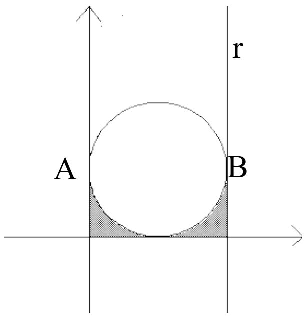
i. Deduzca la ecuación del eje radical entre cada par de cfas. del haz.

ii. Deduzca la cantidad de puntos bases (puntos que pertenecen a todas las cfas. del haz)

iii. Halle la ecuación de la cfa. del haz cuyo centro pertenece al eje ox. Hallar elementos restantes.

iv. Deduzca la ecuación del lugar geométrico de los centros de las cfas al variar λ

B) Escriba un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región sombreada:



r || oy

AB es diámetro.

A(0,5) B(10,5)