PROYECCIONES ORTOGONALES 2007

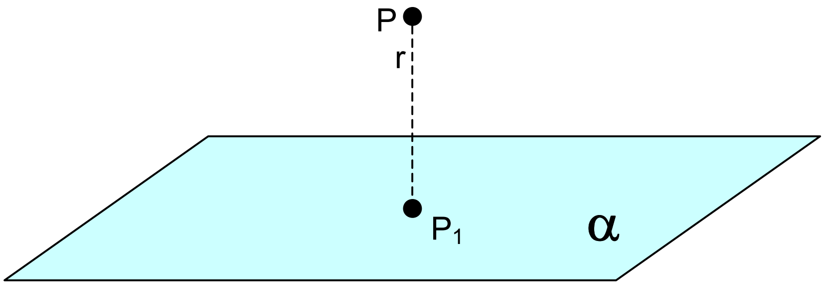
INTRODUCCIÓN AL CURSO DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Prof:Sergio Weinberger

Definiciones:

1) Proyección de un punto:

Dados un punto P y un plano α, llamaremos **proyección ortogonal de P en α al punto P_1** que definiremos de la siguiente forma:

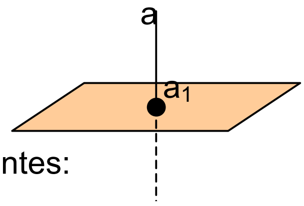
$\mathbf{P_1} = r \cap \alpha$, siendo r la recta perpendicular a α, que pasa por P



2) Proyección de una recta :

Dados una recta a y un plano α, llamaremos **proyección ortogonal de a en α a la recta a_1(o punto)** que definiremos de la siguiente forma:

i) si $a \perp \alpha \Rightarrow a_1 = a \cap \alpha$ (en este caso a_1 es un punto en el cual se proyectan todos los puntos de la recta)

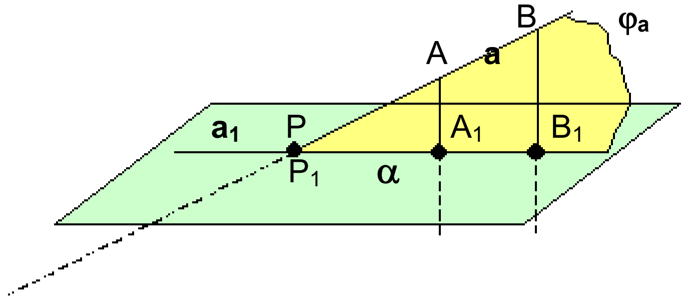


ii) si $a \not\perp \alpha \Rightarrow$ podríamos definir a_1 de dos maneras equivalentes:

- $\mathbf{a_1 = A_1\, B_1}$, siendo A_1 y B_1 las proyecciones ortogonales de dos puntos A y B cualesquiera de a.

- $\mathbf{a_1 = \varphi_a \cap \alpha}$, siendo φ_a el plano que contiene a la recta a, además $\varphi_a \perp \alpha$

Observación: El punto $P \in \alpha$ es "unido" al proyectar.



PROPIEDADES DE LAS PROYECCIONES

1) <u>CONSERVACIÓN DE MEDIDAS:</u> Analizaremos la conservación o no de la medida de un segmento al proyectarlo ortogonalmente en α.

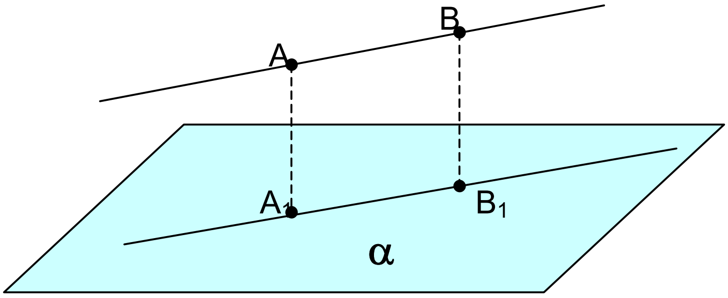
   a) **si AB // α :** en este caso $AB // A_1 B_1$
   La proyección de una recta en un plano paralelo a la misma, es
   . una recta paralela a la dada.
   (si así no fuera, al ser coplanares AB y $A_1 B_1$ y no paralelas serían secantes y entonces no sería AB // α).

   Tenemos entonces : $AB//A_1 B_1$
   Además $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha \xrightarrow{\text{prop.}} AA_1 // BB_1$ $\Rightarrow ABB_1A_1$ es un paralelogramo.
   (def.proy.ort.)

   $$\Downarrow$$

   $$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$$

   En este caso entonces se conservan las medidas.



Observación:

Al ser $AA_1 \perp \alpha$ y $A_1B_1 \subset \alpha \Rightarrow$ $A\hat{A}_1B_1$ es recto y como ABB_1A_1 es //gramo

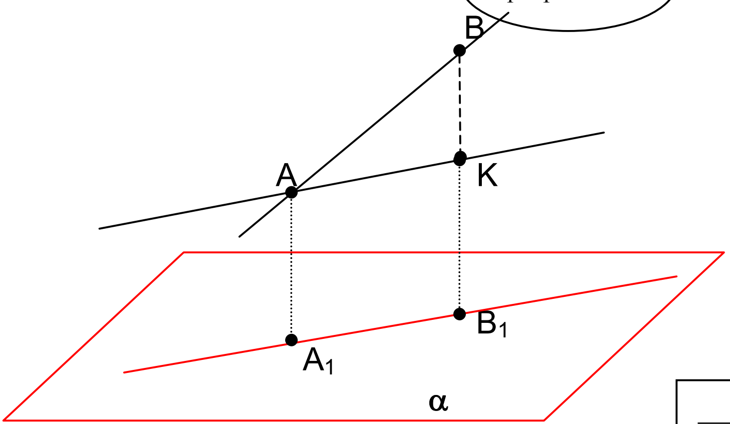
$$\Downarrow$$

ABB_1A_1 es rectángulo

   b) **si AB $\nparallel$ α :** Sea $AK// A_1B_1$ / $K \in BB_1$

Por idéntico razonamiento que en el caso anterior : AKB_1A_1 es un rectángulo$\Rightarrow$

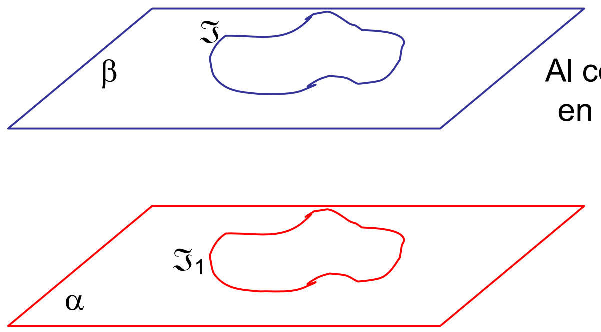
$\Rightarrow$ el triángulo AKB es rectángulo en K y $\overline{AK} = \overline{A_1B_1} < \overline{AB}$



De manera que en general : $\boxed{\overline{A_1B_1} \leq \overline{AB}}$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE CONSERVACIÓN DE MEDIDAS :

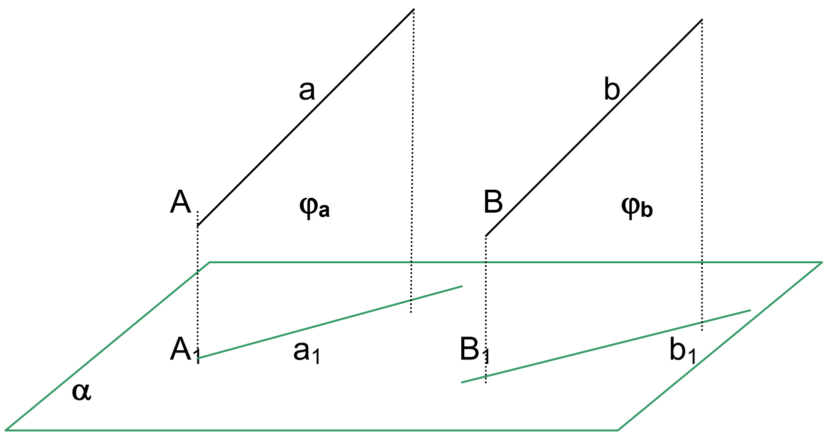
Si $\Im$ es una figura / $\Im \subset \beta$, $\beta // \alpha \Rightarrow \Im = \Im_1$



Al corresponderse $\Im$ y $\Im_1$ en una traslación : $\Im = \Im_1$,

2) CONSERVACIÓN DEL PARALELISMO :

$$\text{si } a // b \text{ y } a \not\perp \alpha \Rightarrow a_1 // b_1$$



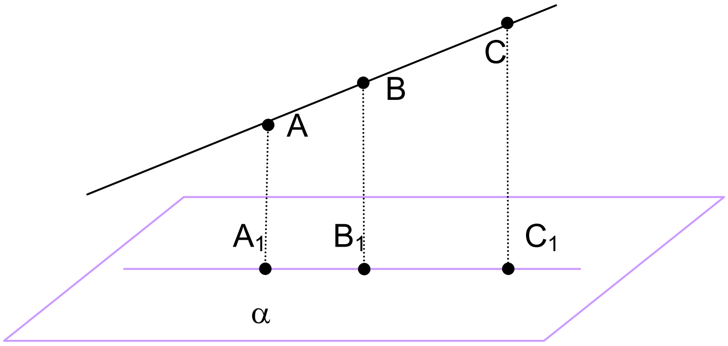
Justificamos lo enunciado:

Los planos φ_a y φ_b que proyectan a las rectas a y b son paralelos entre si por CNyS puesto que contienen dos pares de rectas respectivamente paralelas : a, AA_1 y b, BB_1

Por lo tanto dichos planos $\varphi_a // \varphi_b$ cortan al α en rectas // (**a_1** y **b_1**)

3) CONSERVACIÓN DE LAS PROPORCIONES:

$$\text{si } A, B, C \in r \,/\, r \not\perp \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}$$



Justificación:

Las rectas AA_1 ,BB_1 y CC_1 son paralelas entre si por ser todas ellas $\perp\alpha$.

$\Downarrow$ Teorema de Thales

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}$$

Ejemplos:

* $\left.\begin{array}{l} \text{si M es p.m de } \overleftrightarrow{AB} \\ AB \not\perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \quad M_1 \text{ es p.m de } \overline{A_1B_1}$
* $\left.\begin{array}{l} \text{si G es baricentro de } \overset{\triangle}{ABC} \\ (ABC) \not\perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow G_1 \text{ es baricentro de } \overset{\triangle}{A_1B_1C_1}$

Observación : $si\ A \in r \quad \Rightarrow \quad A_1 \in r_1$ **, por lo tanto,**

$I = r \cap s \rightarrow I_1 = r_1 \cap s_1$

SE CONSERVAN RELACIONES DE PERTENENCIA E INCIDENCIA

4) CONSERVACIÓN DE ÁNGULOS:

La propiedad fundamental asegura que :

a) si $a\hat{O}b \subset \beta, \beta // \alpha \quad \Rightarrow \quad a_1\hat{O}_1b_1 = a\hat{O}b$

<u>Es decir, si el ángulo se encuentra en un plano // al de proyección, conserva su medida al proyectarse.</u> **<u>Si el ángulo tiene los dos lados // al plano de proyección, conserva su medida al proyectarse</u>**

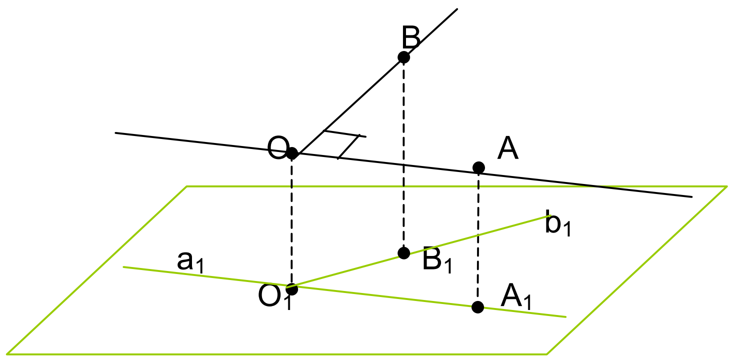
b) si $a\hat{O}b \not\parallel \alpha$ en general el ángulo no se conserva, aunque si el

. $a\hat{O}b$ es recto :

TEOREMA DEL ÁNGULO RECTO:

"Si un ángulo recto tiene un lado // al plano de proyección y el otro no ⊥ al mismo, se proyecta recto"

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } a\hat{O}b \text{ es recto} \\ a // \alpha, b \not\perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow a_1\hat{O}_1b_1 \text{ recto}$$



"RECÍPROCO"

"Si un ángulo tiene un lado // al plano de proyección y se proyecta recto, dicho ángulo es también recto"

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_1\hat{O}_1b_1 \text{ es recto} \\ a // \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow a\hat{O}b \text{ recto}$$