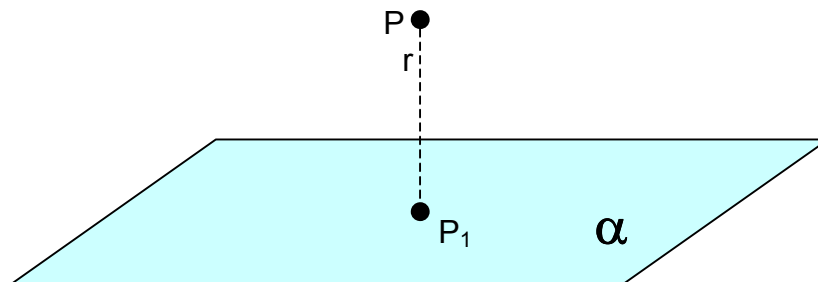


**Definiciones:**

1) Proyección de un punto:

Dados un punto P y un plano  $\alpha$ , llamaremos **proyección ortogonal de P en  $\alpha$**  al punto  $P_1$  que definiremos de la siguiente forma:

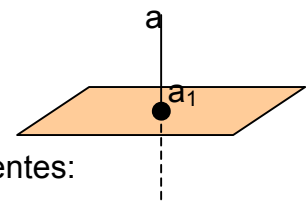
$P_1 = r \cap \alpha$ , siendo r la recta perpendicular a  $\alpha$ , que pasa por P



2) Proyección de una recta :

Dados una recta a y un plano  $\alpha$ , llamaremos **proyección ortogonal de a en  $\alpha$**  a la recta  $a_1$ (o punto) que definiremos de la siguiente forma:

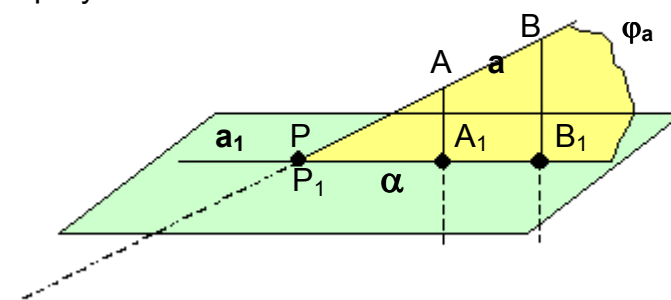
i) si  $a \perp \alpha \Rightarrow a_1 = a \cap \alpha$  (en este caso  $a_1$  es un punto en el cual se proyectan todos los puntos de la recta)



ii) si  $a \not\perp \alpha \Rightarrow$  podríamos definir  $a_1$  de dos maneras equivalentes:

- $a_1 = A_1 B_1$ , siendo  $A_1$  y  $B_1$  las proyecciones ortogonales de dos puntos A y B cualesquiera de a.
- $a_1 = \varphi_a \cap \alpha$ , siendo  $\varphi_a$  el plano que contiene a la recta a, además  $\varphi_a \perp \alpha$

Observación: El punto  $P \in \alpha$  es “unido” al proyectar.



## PROPIEDADES DE LAS PROYECCIONES

1) CONSERVACIÓN DE MEDIDAS: Analizaremos la conservación o no de la medida de un segmento al proyectarlo ortogonalmente en  $\alpha$ .

a) si  $AB \parallel \alpha$ : en este caso  $AB \parallel A_1 B_1$

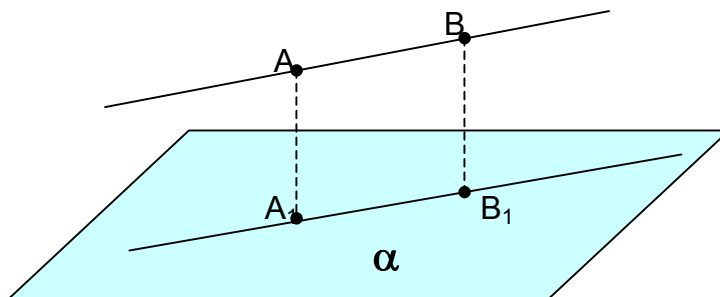
La proyección de una recta en un plano paralelo a la misma, es una recta paralela a la dada.

(si así no fuera, al ser coplanares  $AB$  y  $A_1 B_1$  y no paralelas serían secantes y entonces no sería  $AB \parallel \alpha$ ).

Tenemos entonces :  $AB \parallel A_1 B_1$  }  $\Rightarrow ABB_1 A_1$  es un  
 Además  $AA_1 \perp \alpha$ ,  $BB_1 \perp \alpha \xrightarrow{\text{prop.}} AA_1 \parallel BB_1$  } paralelogramo.  
 (def.proy.ort.)

$$\overline{AB} = \overline{A_1 B_1}$$

En este caso entonces se conservan las medidas.



Observación:

Al ser  $AA_1 \perp \alpha$  y  $A_1 B_1 \subset \alpha \Rightarrow \widehat{A A_1 B_1}$  es recto y como  $ABB_1 A_1$  es //gramo

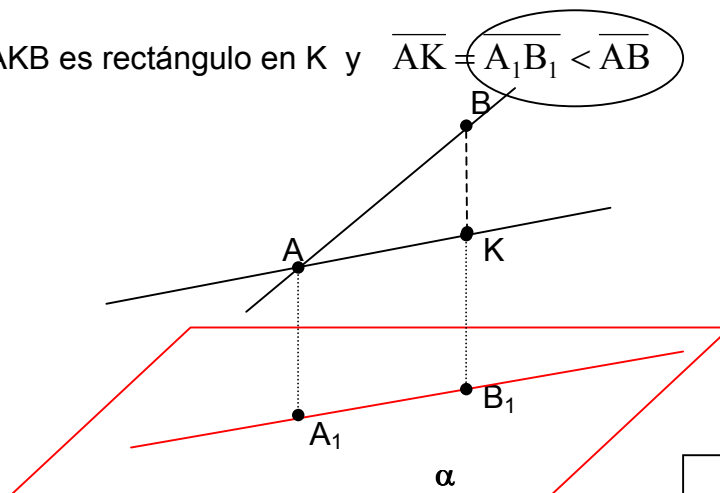


**$ABB_1 A_1$  es rectángulo**

b) si  $AB \not\parallel \alpha$ : Sea  $AK \parallel A_1 B_1$  /  $K \in BB_1$

Por idéntico razonamiento que en el caso anterior :  $AKB_1 A_1$  es un rectángulo  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  el triángulo  $AKB$  es rectángulo en  $K$  y  $\overline{AK} = \overline{A_1 B_1} < \overline{AB}$



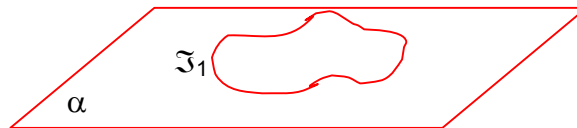
De manera que en general :  $\overline{A_1 B_1} \leq \overline{AB}$

**PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE CONSERVACIÓN DE MEDIDAS :**

Si  $\mathfrak{S}$  es una figura /  $\mathfrak{S} \subset \beta$ ,  $\beta // \alpha \Rightarrow \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$

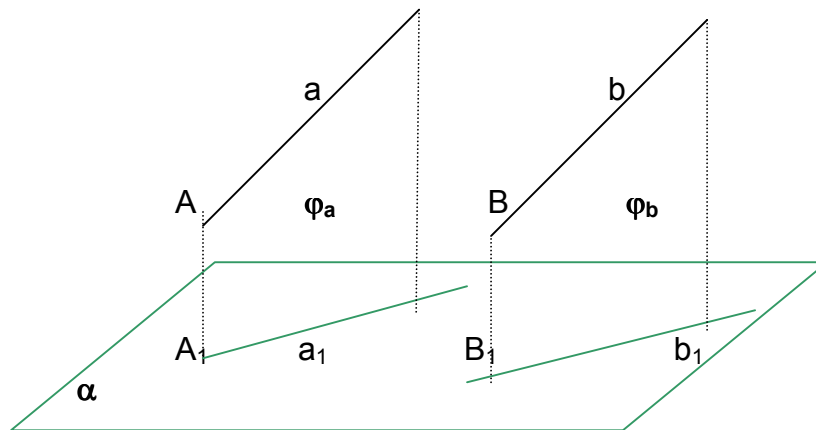


Al corresponderse  $\mathfrak{S}$  y  $\mathfrak{S}_1$  en una traslación :  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ ,



**2) CONSERVACIÓN DEL PARALELISMO :**

si  $a // b$  y  $a \perp \alpha \Rightarrow a_1 // b_1$



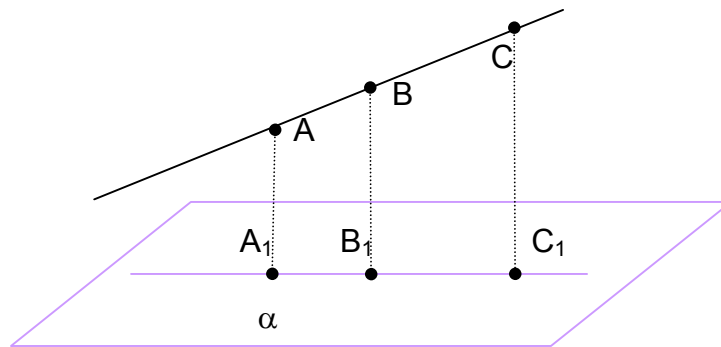
Justificamos lo enunciado:

Los planos  $\varphi_a$  y  $\varphi_b$  que proyectan a las rectas  $a$  y  $b$  son paralelos entre si por CNyS puesto que contienen dos pares de rectas respectivamente paralelas :  $a, AA_1$  y  $b, BB_1$

Por lo tanto dichos planos  $\varphi_a // \varphi_b$  cortan al  $\alpha$  en rectas  $// (a_1$  y  $b_1)$

### 3) CONSERVACIÓN DE LAS PROPORCIONES:

$$\text{si } A, B, C \in r / r \perp \alpha \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}$$



Justificación:

Las rectas  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$  son paralelas entre si por ser todas ellas  $\perp \alpha$ .

↓ Teorema de Tales

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}$$

Ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } M \text{ es p.m de } \overline{AB} \\ \text{ } \overline{AB} \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 \text{ es p.m de } \overline{A_1B_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } G \text{ es baricentro de } \triangle ABC \\ \text{ } (\triangle ABC) \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow G_1 \text{ es baricentro de } \triangle A_1B_1C_1$$

**Observación :** si  $A \in r \Rightarrow A_1 \in r_1$ , por lo tanto,  
 $l = r \cap s \rightarrow l_1 = r_1 \cap s_1$   
**SE CONSERVAN RELACIONES DE PERTENENCIA E INCIDENCIA**

4) CONSERVACIÓN DE ÁNGULOS:

La propiedad fundamental asegura que :

$$a) \text{ si } \hat{aOb} \subset \beta, \beta // \alpha \Rightarrow a_1\hat{O}_1b_1 = \hat{aOb}$$

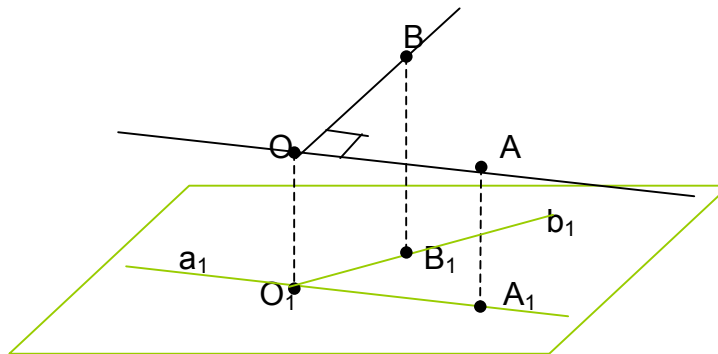
Es decir, si el ángulo se encuentra en un plano // al de proyección, conserva su medida al proyectarse.  
**Si el ángulo tiene los dos lados // al plano de proyección, conserva su medida al proyectarse**

$$b) \text{ si } \hat{aOb} \not\subset \alpha \text{ en general el ángulo no se conserva, aunque si el } \hat{aOb} \text{ es recto :}$$

TEOREMA DEL ÁNGULO RECTO:

“Si un ángulo recto tiene un lado // al plano de proyección y el otro no  $\perp$  al mismo, se proyecta recto”

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \hat{aOb} \text{ es recto} \\ a // \alpha, b \not\perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a_1\hat{O}_1b_1 \text{ recto}$$



“RECÍPROCO”

“Si un ángulo tiene un lado // al plano de proyección y se proyecta recto, dicho ángulo es también recto”

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } a_1\hat{O}_1b_1 \text{ es recto} \\ a // \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{aOb} \text{ recto}$$