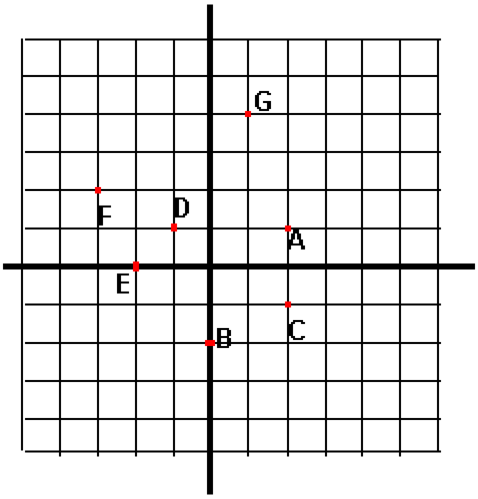
UNIDAD 2

RELACIONES Y FUNCIONES

- Concepto de par ordenado.
- Definición de Producto Cartesiano de dos conjuntos.
- Definición de Relación entre conjuntos
- Funciones:
  1) Definición.
  2) Dominio, Codominio, Recorrido, Imágenes y Preimágenes
  3) Representación
  4) Clasificación



En el sistema de ejes coordenados cartesianos adjunto, aparecen representados algunos puntos.

- la abscisa de **A** es: ....
- la ordenada de **B** es: ....
- el punto de abscisa 1 es: ....
- las coordenadas de **D** son: ....
- las coordenadas de **E** son: ....
- las coordenadas de **C** son: ....

Busca el punto de coordenadas **(1,2)**, ¿coincide con **A**?

Par ordenado

*Llamamos **par ordenado** a un conjunto de dos elementos dados en un cierto orden.*

Y para distinguirlo de un conjunto binario cualquiera lo anotamos usando paréntesis.

<u>Nota</u>: $(a,b) \neq \{a,b\}$

Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) son iguales sí y sólo sí a=c y b=d.

$$\mathbf{(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d}$$

<u>Ejercicio</u>:

Hallar $x\in \mathbf{R}$, e $y\in \mathbf{R}$ de modo que se cumplan las igualdades entre los siguientes pares ordenados de números reales:

a) $(x + y , 3) =(3, 2x - y)$
b) $(y + x , 7) = (1, 2x +4y)$
c) $(y + 2x , 16) = (8, 4x + 2y)$
d) $(4x + 2y , 16) = (32, 2x - y)$

Producto cartesiano

Dados los conjuntos: **A**={1,2,3} y **B**={3,4} , escribe como pares ordenados todos los puntos con abscisa en el conjunto **A** y ordenada en el conjunto **B**. ¿Cuántos son?

Llamamos ***producto cartesiano*** *de dos conjuntos A y B, y lo anotamos* ***AxB*** *al conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados con primera componente perteneciente al conjunto A y segunda componente perteneciente al conjunto B .*

AxB = { (a,b) / a$\in$ **A** y b$\in$ **B** }

<u>Aplicaciones:</u>

1) a) Dados los conjuntos A y B tales que: **A**={1,2} , **B**={ w,y,z}, escribe los conjuntos **AxB**, **BxA** y **AxA** por extensión.

b) Representa **AxB** y **BxA** de dos formas diferentes. ¿Se verifica : **AxB= BxA**? ¿Por qué?

2) Un alumno dice haber hallado el siguiente producto cartesiano **CxD** tal que : **CxD**={(a,1),(a,2),(b,1),(c,1),(c,2)}, ¿tiene razón?

<u>Ejercicio</u>:

Sea los conjuntos A y B / $A=[1,5]$, $B=[2,3]$,

a) representa el conjunto AxB en un sistema de ejes coordenados cartesianos, ¿qué figura es?
b) sean A' y B' tales que A' =A $\cap$ **N** , B' =B $\cap$ **N** , escribe por extensión A' x B'.

<u>Ejercicio introductorio</u>:

Dados los conjuntos A ={2,4,14,16} y B ={1,2,5,7},determinar por extensión:

- AxB =
- R_1/R_1 ={(a,b)$\in$ AxB :a=2b}
- R_2/R_2 ={(a,b)$\in$ AxB :a=b}
- R_3/R_3 ={(a,b)$\in$ AxB :a+b=9}
- R_4/R_4 ={(a,b)$\in$ AxB :a es múltiplo de b}
- R_5/R_5 ={(a,b)$\in$ AxB :a$\leq$b}

Observa que R_1,R_2,R_3,R_4,R_5 son ……………………………………. de AxB.

Relación

Dados dos conjuntos **A** y **B**, llamamos relación $\mathcal{R}$ / $\mathcal{R}$: **A**$\to$**B** , a todo subconjunto del producto cartesiano AxB.

Continuando con el ejercicio introductorio, ¿qué puedes afirmar acerca de los conjuntos R_1,R_2,R_3,R_4,R_5 a partir del concepto de Relación?

Ejercicios:

Dados los conjuntos: **A**, **B** / **A**={a,b,c} , **B**={2,5},

1) indica si los siguientes conjuntos definen relaciones de **A** en **B**, fundamenta en cada caso tu respuesta,

R_1={(a,b),(a,5),(b,5),(b,c)}

……………………………………………………………………………………………………

R_2={(a,2),(b,2),(c,5)}

……………………………………………………………………………………………………

R_3={(a,2),(c,5)}

……………………………………………………………………………………………………

R_4={(a,2),(b,2),(c,2)}

……………………………………………………………………………………………………

R_5={(a,b),(b,5),(5,c)}

……………………………………………………………………………………………………

R_6={(a,2),(a,5),(c,2),(b,5)}

……………………………………………………………………………………………………

2) indica en cuáles de las relaciones anteriores:

a) Todos los elementos de **A** tienen correspondiente,

……………………………………………………………………………………………………

b) Todos los elementos de **A** tienen un único correspondiente.

……………………………………………………………………………………………………

NOTA : Aquellas relaciones que cumplen "b" se llaman **funciones**.

Función

*Dados los conjuntos **A** y **B** llamamos **función f** de **A** en **B** y la anotamos: f:**A**→**B**, a toda relación de **A** en **B** que verifica, que todo elemento de **A** tiene uno y sólo un correspondiente en **B**.*

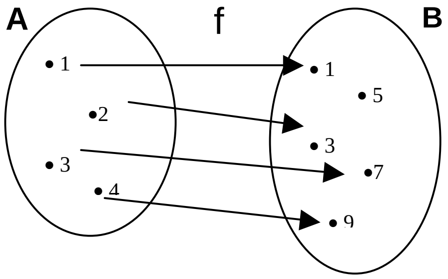
3) Investiga cuales de las relaciones anteriores son funciones, representa mediante diagramas de Venn, aquellas que sean funciones.

Dominio, Codominio, Recorrido, Imagen, Preimagen

Dado el diagrama de una función f / f: A$\rightarrow$ B como muestra la figura adjunta:

A = {1; 2; 3; 4}

B = {1; 3; 5; 7; 9}



<u>Observaciones</u>:

- **A** se dice ***dominio*** de la función y se anota D(f)=**A**.
- **B** se dice conjunto ***codominio*** de la función f y se anota Cod(f) = **B**
- (2,3) $\in$ f, decimos que "3 es la ***imagen*** de 2" por la función f y lo escribimos **f(2)= 3**.
- (4,9) $\in$ f, decimos que "4 es la ***preimagen*** de 9" por la función f y lo escribimos **f(4)= 9**.
- El conjunto dominio también recibe el nombre de ***conjunto de preimágenes*** y el conjunto de sus correspondientes se llama ***conjunto imagen***: Im(f) o **recorrido** de f.

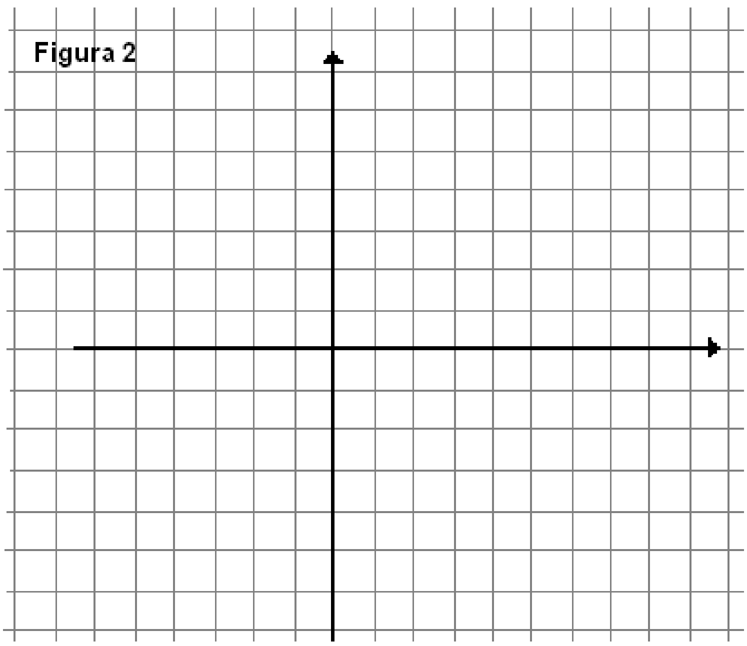
  Im (f) = {1,3,7,9} , obsérvese que **Im(f)** $\subset$ **B** .

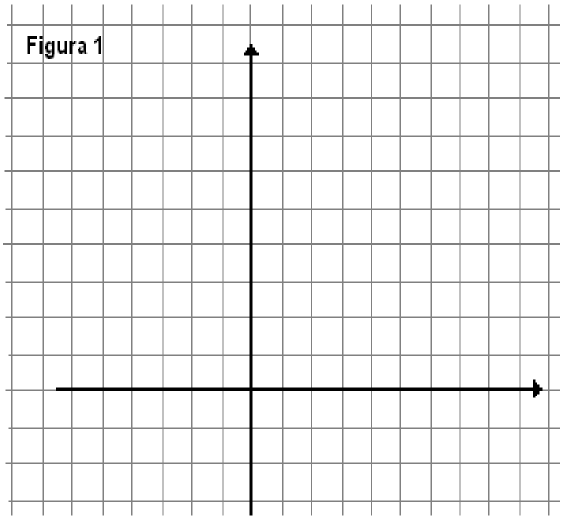
1) Escribe f por extensión: f = { ………………………………………………………………………. }

Una posible definición de f por comprensión, es la siguiente:

$$f : A \rightarrow B \ / \ f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \ \Leftrightarrow \ x \leq 2 \\ 2x + 1 \ \Leftrightarrow \ x > 2 \end{cases}$$

2) Representa f en el sistema de ejes coordenados cartesianos de la figura 1.
3) Si ahora cambiamos el dominio y codominio de f y consideramos f / f:R$\rightarrow$R, representa f en el sistema de ejes coordenados cartesianos fe la figura 2.





ecimos que " x es la ***preimágen*** de y por f "
" y es la ***imagen*** de x por f "
f(x) .

alente a decir $(x,f(x)) \in f$.

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Sea f: $A \rightarrow B$ una función, tenemos las siguientes definiciones

f es inyectiva si y sólo sí para todo par x_1 , x_2 de elementos
$f(x_1)$, $f(x_2)$ también son distintas.

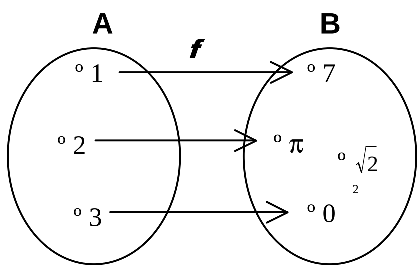
f es sobreyectiva si y sólo sí todo elemento del codominio es
Obsérvese que: esto último implica que el recorrido de f es igu

f es biyectiva si y sólo sí es inyectiva y sobreyectiva.

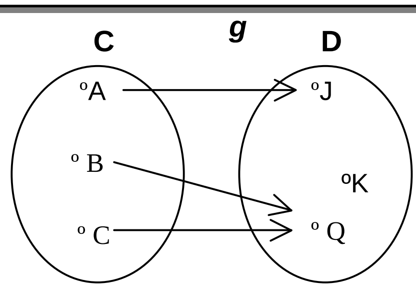
Obsérvese que esto último implica que:

1) todo elemento del codominio es imagen de un único ele
2) Los cardinales del dominio y recorrido son iguales.

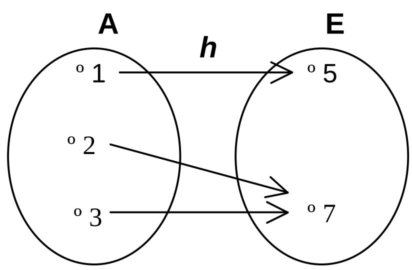
Ejemplos:



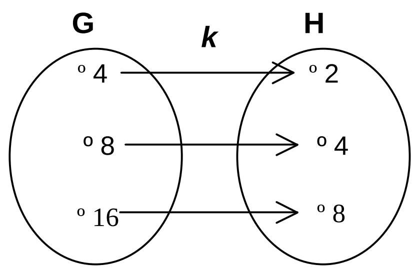
f :A→B , es una función inyectiva.



g :C→D , es una función no inyectiva.
g :C→D , es una función no sobryectiva.



h :A→E , es una función sobreyectiva.



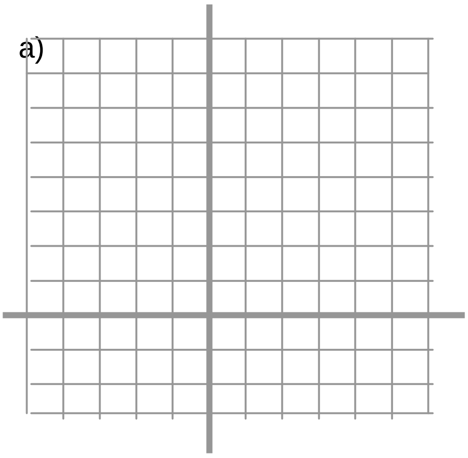
k :G→H , es una función biyectiva.

APLICACIONES

1. **i)** Dadas las siguientes relaciones indica cuales corresponden a funciones. Justifica tu respuesta.

ii) Para aquellas que correspondan a funciones, realiza su clasificación.

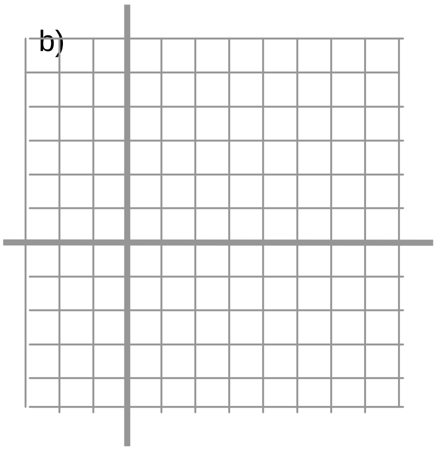
a)



$\mathcal{R}_1 : A \to \mathbf{R}$, $\mathcal{R}_1 = \{(0,2),(1,4),(2,6),(-1,0),(-2,-2)\}$

con $A=\{-2,-1,0,1,2\}$

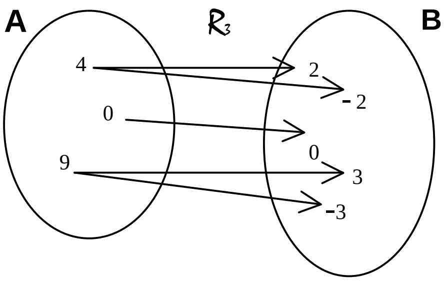
b)



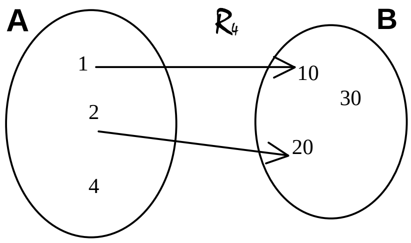
$\mathcal{R}_2 \subset A\text{x}A$ con $A= \{a,b,c,d\}$

$\mathcal{R}_2=\{(a,a),(a,d),(b,a),(c,c),(d,b)\}$

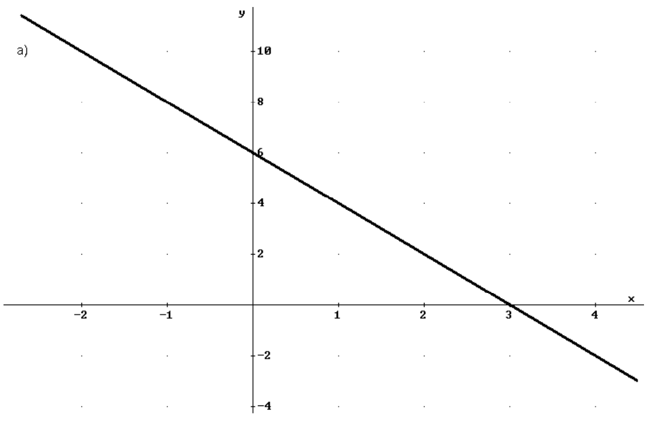
c)

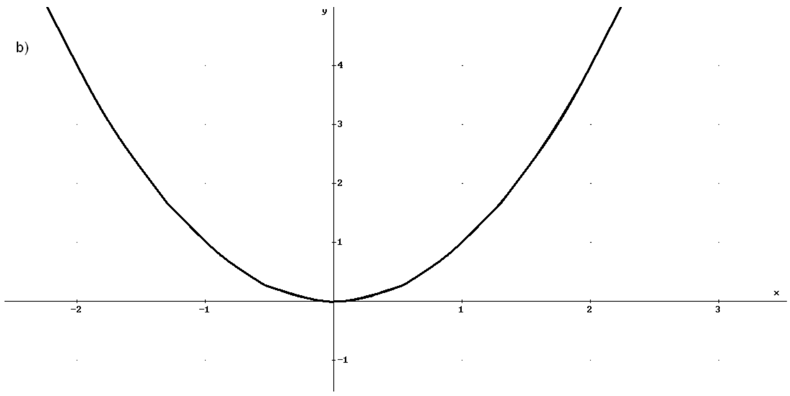


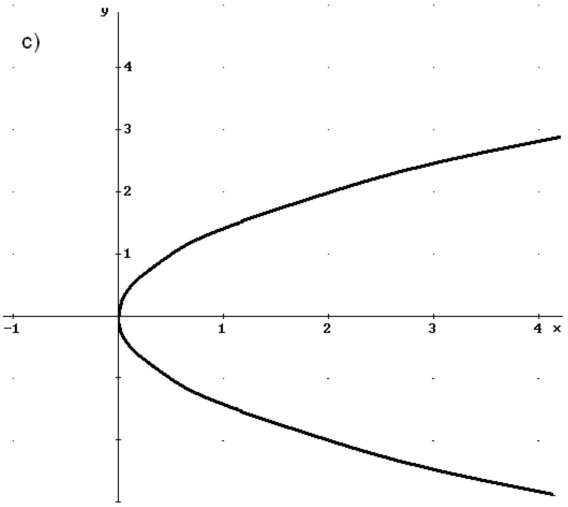
d)

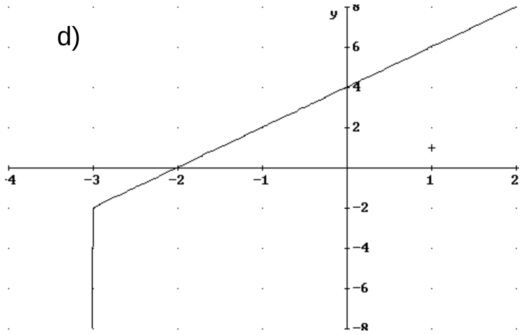


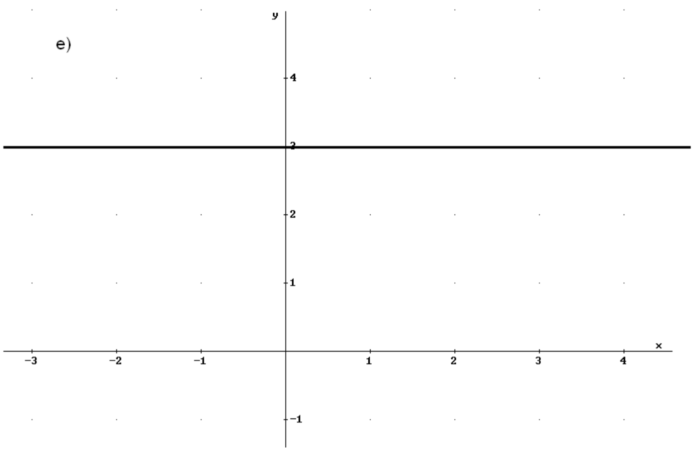
2. a) Indica si los siguientes gráficos corresponden a funciones de dominio real:

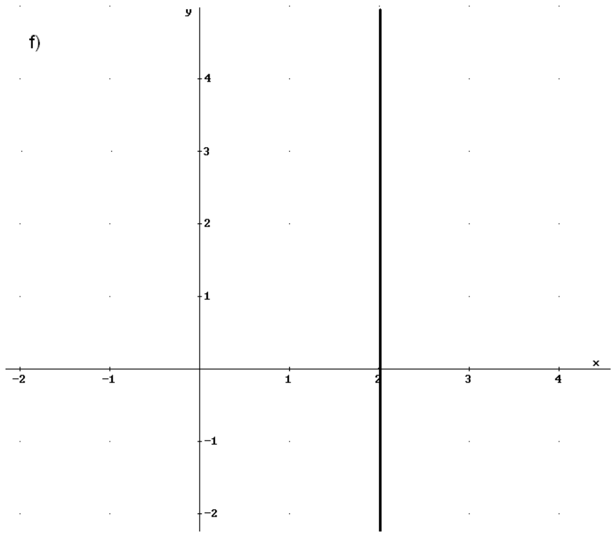












b) Para aquellas que son funciones: 1) realiza su clasificación, indicando dominio y codominio.
2) escribe la expresión de f(x).

3. Sea f**:** **A** $\rightarrow$ **B/** f(x)=x+2 con **A**=$\{x / x \in \mathbf{Z} \text{ , } x.(x^2 - 1)(x^2 + x - 6) = 0\}$ y **B** $= \{-1,1,2,3,4,5,7,8\}$,

a) ¿ f es función?
b) realiza el diagrama de f y su RG,
b) determina el Rec(f),
c) realiza la clasificación de f,
d) representa f en un sistema de ejes coordenados cartesianos,
e) restringe el codominio para que f resulte biyectiva.
f) Sea g : $[-3,2] \rightarrow$ **R** **/** g (x)=x+2 , realiza la representación gráfica de g en un sistema de ejes coordenados cartesianos.
g) Compara las RG realizadas en las partes e) y g), ¿son iguales?. ¿Por qué?

4. Sea $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{N}$ / $f(x)=x^2+4$, siendo **A**/**A**= $\{-1,-2,0,1,2,3,4\}$,

a) ¿ f es función?

b) Realiza el diagrama de f y su RG en un sistema de ejes coordenados cartesianos.

c) Determina D(f) y Rec(f).

d) Clasifícala.

5. Se considera la función $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ / $f(x)=x^2$, indica si son verdaderas (V) o falsas (F), las siguientes afirmaciones:

a. f es inyectiva.

b. La única preimagen de 4 es 2.

c. f no es función, pues varios elementos del dominio tienen la misma imagen.

d. f no es sobreyectiva.