

1) a) i) Demostrar que:

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \in \mathbb{R}^*, \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \Rightarrow f(x).g(x) \approx k.g(x)$$

ii) Calcular : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + 5x^2 + 7x - 12).L(x^3 + 2x^2 - 2)}{x^2 - 1}$

b) Sea $f : f(x) = (1 - \lambda x).e^{\lambda x} + 1$, con $\lambda \neq 0$

i) Para $\lambda > 0$ Investigar si es posible aplicar el teorema de Bolzano a f en : $[-1/\lambda, 2/\lambda]$ o en $[0, 1/\lambda]$. Fundamentar respuestas.

ii) EA de f , discutiendo según $\lambda \neq 0$, efectuar bosquejos gráficos en cada caso.

c) Verdadero o falso?(si V: demostrar, si F: contraejemplo con fundam.)

i) si $\exists g(a) \rightarrow g$ es continua en a

ii) si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \beta \in \mathbb{R} \rightarrow h$ es continua en a .

iii) si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > 3 > f(b) \rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 3$

2) a) Sean: $f : f(x) = \frac{1}{2}e^{x-2}$ $g : g(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2x - 2$

i) Calcular $f'(2)$ y $g'(2)$, aplicando la definición de derivada.

ii) Justificar que G_f y G_g son tangentes en el punto $(2, 1/2)$.
(tienen una misma recta tangente en dicho punto)

b) Sea $h : h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-2} & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{3}{8}x^2 + 2x - 2 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 20 \frac{e^{x-4}}{x^2 - 4x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

i) Estudiar continuidad y derivabilidad de h en 2 y en 4.

ii) Completar el EA necesario (sin h'') para realizar un bosquejo gráfico de h que incluya tangentes o semitang. en $x=2$ y $x=4$.

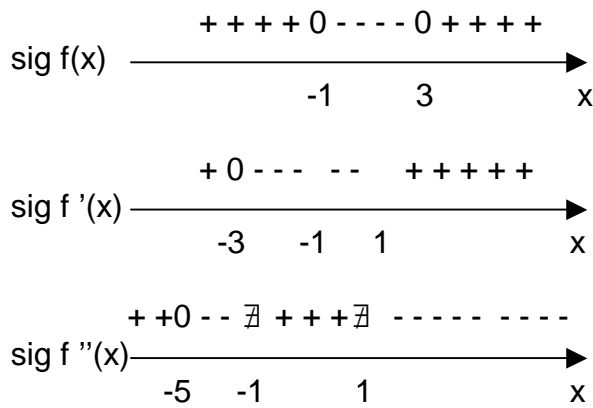
iii) A partir del bosquejo realizado, indicar un posible signo de $h''(x)$

c) Verdadero o Falso?.(si V: demostrar, si F: contraejemplo)

i) si $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = -1 \Rightarrow u$ es continua en a .

ii) si f es cont. en a , y el G_f no presenta } $\Rightarrow f$ es derivable en a
 semitangentes distintas en $(a, f(a))$

3) (LIBRES) Se considera una función f que cumple:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = -1$$

$$f(-3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 8$$

$$f(-5) = 1 \quad f'(-5) = 2$$

a) Graficar f .

b) Verdadero o Falso?. Justificar sólo en base a los datos aportados.

i) f derivable en -1 ii) f derivable en 1

iii) f continua en -3 iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 0$

c) Sea $f : f(x) = 2x^4 + x^3 + x + 1$
 Puede afirmarse que $\exists c \in (-1, 0) / f'(c) = 0$?. Fundamentar.

d) Calcular : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{2x} - 3x + 2}{x - L|x|}$

EXAMEN 6toE MAT "A" 2daPRUEBA /4/06 LICEO N°3 NOCT.

Tribunal : Weinberger.

1) a) Sea $u:u(x)=e^{-x}$. Calcular $u'(a)$, aplicando definición.
(Recordar que $e^\alpha - e^\beta = e^\beta \cdot (e^{\alpha-\beta} - 1)$)

b) Sea $f : f(x) = \frac{x^2 - 3x - 3 + 1}{e^x}$

i) Demostrar que f tiene una raíz en $(0,5)$.

ii) EAYRG de f (sin f'')

Escribir un signo de f'' coherente con el estudio hecho.

c) Demostrar que :

$\left. \begin{array}{l} \text{Si } g \text{ es derivable en } [a,b] \\ \text{a y b son raíces de } g \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) / g'(c)=0$

2) Sean $f : f(x) = L|x^2-1| - \frac{1}{x-1}$

a) EAYRG de f

b) Se considera la función $g : g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ |x-2|-1 & \text{si } 0 < x < 4 \\ L(x-4) & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

i) Estudiar continuidad y derivabilidad de f en 0, 2 y 4.

ii) Graficar f .

c) ¿Verdadero o Falso?. (Si V: demostrar, si F:contraejemplo)

i) si h no es derivable en 2 $\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

ii) $\left. \begin{array}{l} \text{si } \exists \text{ y es finito el } \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \\ \text{u tiene un mínimo relativo en a} \end{array} \right\} \Rightarrow u'(a)=0$

1) a) Sea $u: u(x) = L|x-1|$.

Deducir, aplicando la def. de derivada, $u'(a)$, ($a \neq 1$)

b) Sea $f: f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x - 32 + 9L|x-1|$

Se sabe que $f(\frac{3}{2}) \approx -18$ y $f(3) \approx 42$

i) Investigar si es posible aplicar el teorema de Bolzano a f en:

- el intervalo $[\frac{3}{2}, 3]$
- el intervalo $[0, 3]$. Fundamentar respuestas.

ii) EAYRG de f , sin f'' . (observar que f tiene una raíz entera)
Escribir un signo de $f''(x)$ coherente con el estudio hecho.

c) Verdadero o falso? Fundamentar:

$$\text{.si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} = -2 \Rightarrow v \downarrow \text{ en } a.$$

2) a) Justificar que $e^x + \frac{2}{x^2} > 0 \forall x \in \mathbb{R}^*$

b) Se considera:

$$f: f(x) = \begin{cases} e^x + \frac{2x-2}{x} & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

i) Estudiar continuidad y derivabilidad de f en 0 y en 2.

ii) EA de f para $x < 0$, sin f''

iii) Graficar f .

c) i) Verdadero o falso?. Fundamentar.

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \alpha \in \mathbb{R}$$

ii) A) Completar y demostrar:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \sim h(x) \\ x \rightarrow 3 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{e^{x-3} - 1} \end{array} \right\} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{e^{x-3} - 1} = \dots\dots\dots$$

B) Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{L(x^2 - 5x + 7)}{e^{x-3} - 1}$

EN 6^{to}E-MATEMÁTICA "A" 2ªPRUEBA 27/12/06 LICEO N°3 NOCTURNO.
TRIBUNAL : Olmos, Schimid, Weinberger.

1) a) Sea $f : f(x) = \left(\frac{1 - 2x}{x} \right) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

i) **EAYRG de f, sin f''.**

Se sabe que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ (interpretar gráficamente).

ii) Escribir un signo de $f''(x)$ coherente con el estudio hecho.

b) Verdadero o falso? Fundamentar. (si V: demostrar, si F: contraejemplo).

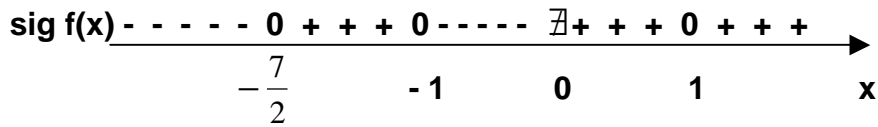
i) si $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \alpha \in \mathbb{R}$

ii) si $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \alpha \in \mathbb{R} \\ g \text{ presenta un mín. relativo en } x = a \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 0$

iii) $\exists \lim_{x \rightarrow a} t(x) = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow t$ es continua en a

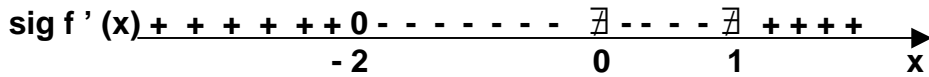
2). a) Sea f una función que cumple las siguientes condiciones:

$d(f) = \mathbb{R}^*$ f es continua en su dominio.

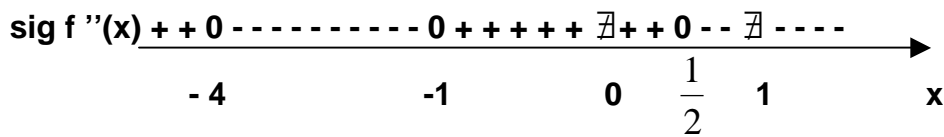


$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 1$



$f(-2)=2$ $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$



$f(-4)=-1$ $f(1/2)=3/2$

b) Verdadero o falso? Fundamentar.

i) Si g y h son infinitos para $x \rightarrow a$ $\left. \begin{array}{l} \text{ord}(h(x)-g(x)) = \text{ord}(2g(x)) \\ \text{ord}(g) > \text{ord}(h) \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ord}(h(x)-g(x)) = \text{ord}(2g(x)) \\ x \rightarrow a \end{array}$

ii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e^{\frac{1}{x}}(3x - 2) - 3x) = 0$

iii) si $f : f(x) = L(2x+4)$, $a > -2 \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{a+2}$ (aplicar def. de derivada)

iv) si $t : t(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x > 0 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow t$ es continua y derivable en $x=0$

EXAMEN 6toE. MAT."A". 2ªPRUEBA (2ºSEMESTRE)
LICEO N°3 NOCTURNO. 14/12/01
Tribunal: Rosa Brun, Laura Ferreira, Sergio Weinberger.

I)a)i) Completar el enunciado y demostración del siguiente teorema:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \quad u(x) \\ x \rightarrow a \\ g(x) \quad v(x) \\ x \rightarrow a \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\dots}{\dots}$$

Demostración :

Multiplico y divido por $u(x)$ y $v(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\dots}{\dots}$$

$x^2 - 4$ por teo

ii) Calcular : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2 - 4} - 1}{L(x^2 + x - 5)}$. Justificar procedimiento.

b)i) EA y RG de : $f : f(x) = L(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

$$\text{ii) Sea } g : g(x) = \begin{cases} L(x+1) - \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ |x + 1| & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- Estudiar continuidad y derivabilidad de g en 0 y en 1.
- Graficar g .

II) a) Verdadero o falso ?. Demostrar.

i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + 1 = \alpha \in \mathbb{R} \implies f$ continua en a.

ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \implies f$ **no** es derivable en a.

iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \beta \in \mathbb{R}^- \implies f$ es estrict.decreciente en a.

b) Graficar una función f que cumpla :

sig f(x) $\frac{\text{-----} 0 \text{+++++++}}{-2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 7$

sig f'(x) $\frac{\text{+++++++} 0 \text{-----} \cancel{0} \text{+++++++}}{-1 \quad 0}$

f(-1) = 2, f(0) = 1, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

sig f''(x) $\text{-----} \cancel{0} \text{++} 0 \text{-----}$ \xrightarrow{x}

f(3) = 5 f'(3) = 4

c) EA y RG de :

$\frac{1}{x-1}$.
 g: g(x) = (2x - 2). e^{x-1} - 3 .

3) Sea f : f(x) = $\frac{2x+2}{x} e^{\frac{x+1}{x}}$

a) EAYRG de f.

b) ¿Verdadero o Falso?. (Si V: demostrar, si F: contraejemplo)

- i) si \exists y es finito el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \Rightarrow (3u)'(a) = 3 \cdot u'(a)$
ii) si \exists y es finito el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = -5 \Rightarrow u \downarrow$ en a

1) a) Sea $f : f(x) = (x + 1) \cdot e^x - x^2 - 4x - 3$

i) Demostrar que : * f tiene una raíz en el intervalo (-2,0)
* $f'(x) = (2x + 2) \cdot (e^x - 2)$

ii) EA y RG de f. No se hallará f'', se dará un posible signo de f'' coherente con el estudio hecho.

b) Verdadero o Falso? Fundamentar (si V: dem, si F : contraejemplo).

i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = -1 \Rightarrow u \downarrow$ en a

ii) si $g \downarrow$ en a $\Rightarrow g'(a) < 0$

2) a) Se consideran : $f : f(x) = \lfloor x^2 - 1 \rfloor - \frac{4}{3}x$, y $u : u(x) = x^2 - 1$

i) Calcular ,aplicando definición, $u'(a)$

ii) EA y RG de f.

b) Sea $g : g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ i) Estudiar cont. y derivabilidad de g en 0 y en 1.
ii) Graficar g.

c) Verdadero o Falso? Fundamentar (si V: dem, si F : contraejemplo).

i) si $\lim_{x \rightarrow 1} v(x) = v(1) \Rightarrow v$ es derivable en 1

ii) si f es derivable en a $\Rightarrow (x \cdot f)'(a) = f(a) + a \cdot f'(a)$

III) (LIBRES)

a) i) Enunciar y demostrar un teorema relativo a suma de infinitos de distinto orden.

ii) Calcular : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{x + Lx}$

b) EA y RG $f : f(x) = x \cdot (L(x+1) - 2) + 2 \cdot L(x+1)$.

1) a) Sea $u : u(x) = L(2x-12)$. Demostrar que $u'(a) = \frac{1}{a-6} \forall a \in \mathbb{R}, a > 6$.
aplicando la definición de derivada.

b) Sea $f : f(x) = L|2x-12| - \frac{x+3}{x}$

- i) Demostrar que f tiene una raíz en el intervalo : [7,9 , 8]
- ii) EAYRG de f, sin f ". Dar un sig f "(x) coherente con el estudio hecho

c) i) Demostrar que si :
 $f(x)$ y $g(x)$ infinitos para $x \rightarrow +\infty$ $f(x)+g(x)-g(x)$
 $\text{ord}[f(x)] < \text{ord}[g(x)]$ $x \rightarrow +\infty$

ii) Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2Lx - e^x}{\sqrt{x+3}}$

1) a) Sea $f : f(x) = L|x+3| + 2x + 4$

- i) Demostrar, aplicando el teorema de Bolzano, que f tiene una raíz en (-2,5 ; -1)
- ii) Verificar si en el intervalo anterior hay una raíz entera.
- iii) EAYRG de f.

b) i) Completar y demostrar:

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \sim h(x) \\ x \rightarrow +\infty \\ \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot g(x) \end{array} \right\} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot g(x) = \dots\dots\dots$$

c) Verdadero o Falso?. (En caso V : demostrar, en caso F: contraej)

i) si $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 0 \Rightarrow h$ tiene máx. o mín relativo en 1.

ii). si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} = -2 \Rightarrow v \downarrow \text{ en } a .$

2) a) Se consideran las funciones : $u:u(x)=2x+4$ y $v:v(x)=e^x$

Calcular, aplicando la definición: $u'(a)$ y $v'(a)$.

b) i) EA y RG de $g : g(x) = (2x + 4).e^x$

ii) Estudiar continuidad , derivabilidad en -2 y en 1 y graficar :

$$h : h(x) = \begin{cases} (2x + 4).e^x & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3) (LIBRES

a) Sea $f : f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2} e^{\frac{x+2}{x}} + 1$

i) EAYRG de f .

ii) ¿puede aplicarse el teorema de Bolzano a f en $[-3,0]$?
 ¿ y en $[-1,9 ; -1]$? Fundamentar respuesta.
 Si en alguno de los dos casos respondió afirmativamente,
completar : $\xrightarrow{\text{por.teo.Bolzano}} \exists c \in (\dots) / f(c) = \dots$

b) Verdadero o Falso? Fundamentar :

iii) si h no es derivable en $2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} h(x)$

iv) si \exists y es finito el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} u(x) = u(a)$

1) a) Sea $f : f(x) = x^3 . e^{x+2} + 5$

i) Demostrar que f tiene una raíz en el intervalo $[-2,-1]$

ii) EA y RG de f sin f'' . Escribir un posible signo de $f''(x)$.

b) Se considera

$$g : g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ L(x+1)+5 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

i) Estudiar continuidad y derivabilidad de g en 0 y en 1 .
ii) Graficar g .

c) i) Demostrar que si :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ y } g(x) \text{ infinitos para } x \rightarrow +\infty \\ \text{ord}[f(x)] < \text{ord}[g(x)] \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) - 2g(x) + 3 \sim -2g(x) \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$$

ii) Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx - 2e^x + 3}{\sqrt{x+3}}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{L|x| - 2e^x}{x^2 + 3}$

2) a) Siendo $u : u(x) = L|x-5|$, demostrar que $u'(a) = \frac{1}{a-5}$ ($a \neq 5$)

b) Sea $f : f(x) = L|x-5| + \frac{x-10}{x-5}$

i) EA y RG de f .

ii) Construir la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(4, f(4))$.

b) Verdadero o Falso? Fundamentar (si V: demostrar, si F: contraej.)

i) si $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$

ii) si $g'(a) < 0 \Rightarrow g \downarrow$ en a

iii) si $f \downarrow$ en $a \Rightarrow f'(a) < 0$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+5)e^{\frac{1}{x}} - x] = 0$

EXAMEN MATEMÁTICA "A" 6toE 14 / 7 / 09 LICEO N°3Noct
TRIBUNAL : Sahajdak, Schimid, Weinberger. 2ª prueba

1) a) i) Demostrar que si :

$$f(x) \text{ y } g(x) \text{ infinitos para } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} g(x) - 2f(x) \sim -2f(x)$$

$$\text{ord}[f(x)] > \text{ord}[g(x)] \quad x \rightarrow +\infty$$

ii) Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx - 2x^3}{e^x - 2}$.

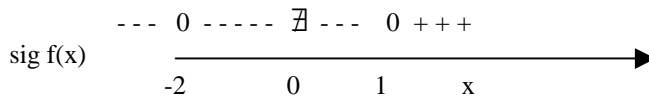
Mencionar los teoremas empleados en el cálculo.

b) Sea $h : h(x) = L|x + 2|$. Demostrar que $h'(a) = \frac{1}{a + 2}$ $a \neq -2$

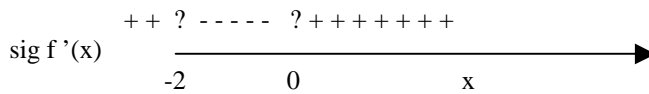
c) Sea $f : f(x) = \frac{x+1}{x} + L|x + 2|$

- i) Demostrar que f tiene una raíz en el intervalo $(-2,6, -2,5)$
- ii) EA y RG de f.

2) a) Se considera una función f que cumple :



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

- i) Indicar si f es derivable en -2 y en 0. Justificar respuestas.
- ii) Indicar, de acuerdo a los datos, si f es continua en 1. Si lo es, demostrarlo. Si es falso, dar un contraejemplo.
- iii) Graficar f coherente con los datos anteriores.

b) i) Demostrar:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \sim g(x) \\ x \rightarrow 3 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} g(x)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} \cdot f(x)$$

ii) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} L|x^2 - x - 5|$

3) (LIBRES)

a) EA y RG de $f: f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} - 2$

b) Se considera

$$g: g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ L(x+1) - 2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{i) Estudiar continuidad y derivabilidad} \\ \text{de } g \text{ en } 0 \text{ y en } 1. \\ \text{ii) Graficar } g. \end{array}$$

i) si $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$

ii) si $g'(a) < 0 \Rightarrow g \downarrow$ en a

iii) si $f \downarrow$ en a $\Rightarrow f'(a) < 0$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+5) \cdot e^{\frac{1}{x}} - x] = 0$

1) a) Sea $u : u(x) = e^{2x} - 1$

- Demostrar, aplicando definición, que : $u'(a) = 2 \cdot e^{2a}$
- Justificar que la recta $y=2x$ es tangente al Gu en el punto $(0,0)$. Graficar u y la recta mencionada en un mismo sistema de ejes.
- Discutir, según $m \in \mathbb{R}$, el signo de la función :
 $g : g(x) = e^{2x} - 1 - mx$
- Para $m=1$, investigar si es posible aplicar el teorema de Bolzano a g (definida en iii), en el intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$. Fundamentar.

b) Sea $f : f(x) = e^{2x} - 2x - mx^2$ con $m \leq 2$

- EA de f , sin f'' .
- Efectuar bosquejos gráficos de f , discutiendo según $m \in (-\infty, 2]$. Teniendo en cuenta $f(0)$, discutir $\text{sig}f(x)$ y escribir un posible $\text{sig}f''(x)$ en cada caso.

2) a) Verdadero o Falso?. Fundamentar. (si V: demostrar, si F: contraejemplo)

- si f y g son infinitos para $x \rightarrow -\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -3 \\ f(x) \approx u(x), \quad g(x) \approx v(x) \\ x \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) + g(x) \approx u(x) + v(x) \quad x \rightarrow -\infty$$
- si $Df = [0, +\infty) \rightarrow f$ es continua $\forall x \in [0, +\infty)$
- si $f \downarrow$ en $a \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha \in \mathbb{R}^-$
- si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} g'(x) = \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow g$ es continua en a

b) Calcular : i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5x} + x}{x^2 \cdot L\left(\frac{x+1}{x}\right)}$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x+3) \cdot e^{\frac{1}{x}} - 2x]$

c) Sea $f : f(x) = \begin{cases} L\left|\frac{2x-3}{x}\right| + \frac{6}{x} & \text{si } x \leq 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 3 < x < 4 \\ \frac{x^2 - 2x - 15}{x-5} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

- EA de f para $x \leq 3$
- Estudiar cont. de f en 3 y en 4.
- Estudiar derivab. de f en 3, 4 y 5
- Graficar f .

1) a) Sea $f : f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + \frac{2x+1}{2x^2}$

i) Investigar si es posible aplicar el teorema de Bolzano a f en los intervalos $[-1,1]$ y $[-1, -\frac{1}{20}]$.

Fundamentar respuestas.

ii) Comprobar que : $f'(x) = \frac{-x-1}{x^3} (e^{\frac{1}{x}} + 1)$ y estudiar su signo,

justificando que : $e^{\frac{1}{x}} + 1 > 0 \forall x \neq 0$.

b) EA y RG de f , sin f'' .

Escribir un posible signo de $f''(x)$, coherente con el estudio hecho.

c) Demostrar que si:

i) $\left. \begin{array}{l} h \text{ es continua en } (a-1, +\infty) \\ h(a) > 3 > h(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) / h(c) = 3$

ii) si $g : g(x) = \sqrt{x+2}$, $a > -2 \Rightarrow g'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a+2}}$
 (aplicar def. de derivada)

2) a) Sea $u : u(x) = L|x| + \frac{1}{x}$.

i) EA y RG de $f, \sin f$ ”.

ii) Sean : $\alpha, \beta \in \mathbb{R} / u(\alpha) = u(\beta) = 1$
 $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^+ / u(\gamma) = u(\delta) = 2$

Es posible aplicar el teorema de Rolle a la función u en los intervalos $[\alpha, \beta]$ y $[\gamma, \delta]$?
 Fundamentar respuestas.

b) Sea $f : f(x) = \frac{x-1}{L|x|}$

i) EA de $f, \sin f$ ”

ii) Graficar f . Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x)$
 e interpretarlo gráficamente.

iii) Si modificamos la definición de f :

$$f : f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{L|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiar continuidad y derivabilidad de f en 0.

c) Verdadero o Falso?. (si V: demostrar, si F: contraejemplo.)

i) si f y g son derivables en $a, h \in \mathbb{R} \Rightarrow (f+hg)'(a) = f'(a) + hg'(a)$

ii) si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -1 \Rightarrow f \downarrow$ en a

iii). si $f \downarrow$ en 3 $\Rightarrow f'(3) < 0$

