FUNCIONES DEFINIDAS POR ZONAS, V.ABSOLUTO,SIGNO

CURSO 6toI, Mat "A" Prof : Marcelo Valenzuela - Sergio Weinberger 2010

$$\text{DEF: Si } x \in R \Rightarrow |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES:

1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in R$

2) $|x| = |-x| \quad \forall x \in R$

3) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4) $|x.y| = |x|.|y| \quad \forall x \in R \forall y \in R$

5) $|x / y| = |x| / |y| \quad \forall x \in R \forall y \in R^*$

6) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x \in R \forall y \in R$
(propiedad triangular)

7) $|x| = k \Leftrightarrow x = k \text{ o } x = -k$
$(k \in R^+)$

8) $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$
$(k \in R^+)$

9) $|x| > k \Leftrightarrow x < -k \text{ o } x > k$
$(k \in R^+)$

10) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ o } x = -y$

11) $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in R$

Demostración de 4) :

a) si $x > 0, y > 0 \Rightarrow x.y > 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |x.y| = x.y \quad (\text{def.}|\,|) \\ |x||y| = x.y \quad (\text{def.}|\,|) \end{array}\right\} \Rightarrow |x.y| = |x|.|y|$$

b) si $x>0, y<O \Rightarrow x.y < 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |x.y| = -x.y \\ |x||y| = x.(-y) = -x.y \end{array}\right\} \Rightarrow |x.y| = |x|.|y|$$

def.| |

c) si $x<0, y<0 \Rightarrow x.y > 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |x.y| = x.y \\ |x||y| = (-x).(-y) = x.y \end{array}\right\} \Rightarrow |x.y| = |x|.|y|$$

d) si $x=0$ y/o $y=0 \Rightarrow$ la igualdad es obvia.

Demostración de 5) : a cargo del lector.

Demostración de 6) : def.| |

a) si $x > 0,\ y > 0 \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} |x.+y| = x+y \\ \\ |x| + |y| = x+y \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| = |x| + |y|$$

b) si $x<0,\ y<0 \Rightarrow x+y < 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} |x+y| = -x-y \\ \\ |x| + |y| = (-x)+(-y) = -x-y \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| = |x| + |y|$$

c) si $x>0,\ y<O \Rightarrow$

def.| |

c1) $x+y \geq 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} |x+y| = x+y \\ \\ |x| + |y| = x-y \\ y<o \Rightarrow -y > o \Rightarrow y< -y \underset{\text{monotonía}}{\Rightarrow} x+y< x-y \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| < |x| + |y|$$

def.| |

c2) $x+y < 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} |x+y| = -x-y \\ \\ |x| + |y| = x-y \\ x>0 \Rightarrow -x < o \Rightarrow -x< x \underset{\text{monotonía}}{\Rightarrow} -x-y< x-y \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| < |x| + |y|$$

d) si $x=0$ y/o $y=0 \Rightarrow$ se cumple la igualdad.

<u>APLICACIONES DE LAS PROPIEDADES 7 A 10:</u>

RESOLVER :

A) $|3x-1| = 2 \overset{\text{prop.7}}{\Leftrightarrow}$

$$\begin{array}{r} 3x-1= -2 \Rightarrow \\ \text{o}\ \ 3x-1= 2 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ x = 1 \end{array}}$$

B) $|-4x+2| < 1$ prop.8

$$\Leftrightarrow -1 < -4x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < -4x < -1 \Leftrightarrow \tfrac{3}{4} > x > \tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S = (1/4,3/4)$$

1 Cada relaciòn escrita en la columna de la izquierda equivale a sólo una de la derecha. Señalar dichos pares.

1	$\lvert x\rvert < 3$
2	$\lvert x-1\rvert < 3$
3	$\lvert 3-2x\rvert < 1$
4	$\lvert 1+2x\rvert \le 1$
5	$\lvert x-1\rvert > 2$
6	$\lvert x+2\rvert \ge 5$
7	$\left\lvert 5-\frac{1}{x}\right\rvert < 1$
8	$\lvert x-5\rvert < \lvert x+1\rvert$
9	$\lvert x^2-2\rvert \le 1$
10	$\sqrt{(x+3)^2}$
11	$\lvert x+3\rvert^2$

A	$x > 3$ o $x < -1$
B	$-3 < x < 3$
C	$x > 2$
D	$(x+3)^2$
E	$-2 < x < 4$
F	$1 < x < 2$
G	$-\sqrt{3} \le x \le -1$ o $1 \le x$
H	$x \le -7$ o $x \ge 3$
I	$\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$
J	$-1 \le x \le 0$
K	$\lvert x+3\rvert$

2 Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).Justificar.

$\lvert 2-\sqrt{5}\rvert = 2-\sqrt{5}$ (.......)

$\lvert \sqrt{3}-1\rvert = \sqrt{3}-1$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow \lvert -x\rvert = x$ (.......)

$si.x < -3 \Rightarrow \lvert x+3\rvert = x+3$ (.......)

$si.x > 5 \Rightarrow \lvert x-5\rvert = x-5$ (.......)

$si.x > 3 \Rightarrow \lvert -3+x\rvert = 3-x$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow \lvert x^2-4\rvert = x^2-4$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow \lvert x\rvert = \sqrt{x^2}$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow \lvert x-1\rvert = \lvert x-2\rvert$ (.......)

$si.x \in \Re \Rightarrow \lvert (x-1).(x^2+1)\rvert = (x^2+1)\lvert x-1\rvert$ (.......)

$si..x > -2 \Rightarrow \lvert (x+2).(x-3)\rvert = (x+2).\lvert x-3\rvert$ (.......)

$si...x \in ..R \Rightarrow \left\lvert \frac{3(-x-4)}{x^2+5}\right\rvert = \frac{3}{x^2+5}\lvert x+4\rvert$

$si...x \in ..R^{*} \Rightarrow \lvert 3x^2-5\rvert < 3x^2+5$

3) a) Resolver las siguientes inecuaciones:

1) Resolver: i) $\lvert 2x-7\rvert < 1$ ii) $\lvert -3x+5\rvert \ge 2$ iii) $\lvert x-a\rvert < \delta$, con $\delta / \delta \in \Re^+$

2) Verificar, gráficamente, los resultados obtenidos en a)1y2

b) Resolver:

i) $\lvert x^2-1\rvert < 2$ ii) $\lvert 4x^2-x\rvert \ge 2x+1$ iii) $\lvert x^3-2x^2\rvert < 5$ iv) $\lvert x^5-3x^2+4x-7\rvert < -2$

4) a) Probar que : $\forall x, y \in R :$ $\lvert x\rvert - \lvert y\rvert \le \lvert x-y\rvert$

b) ¿qué condiciones deben verificar x e y para que se cumpla la igualdad?

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

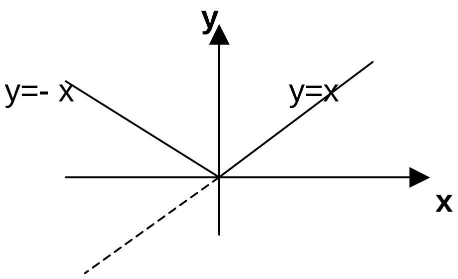
Estudiaremos la función **f : f (x) = |x|**

Raíces o ceros : por prop.2) : única raíz cero

Por prop.1) : sig. $|x|$ ++++++0++++++++++

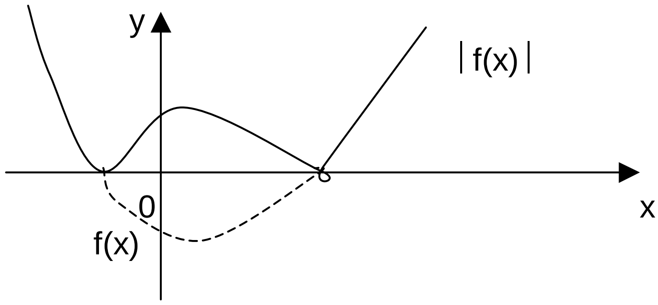
0 x

Gráfica . De acuerdo a la def.:



Observación : La gráfica puede obtenerse graficando la función “sin valor absoluto” : g(x)=x, simetrizando la parte de g(x)<0 respecto al eje Ox..

En general, conociendo la gráfica de una función f, podemos obtener la de $|f(x)|$, dejando inmodificada la parte correspondiente a f(x)>0 y simetrizando respecto a Ox la parte correspondiente a f(x)<0.



Ejemplos:

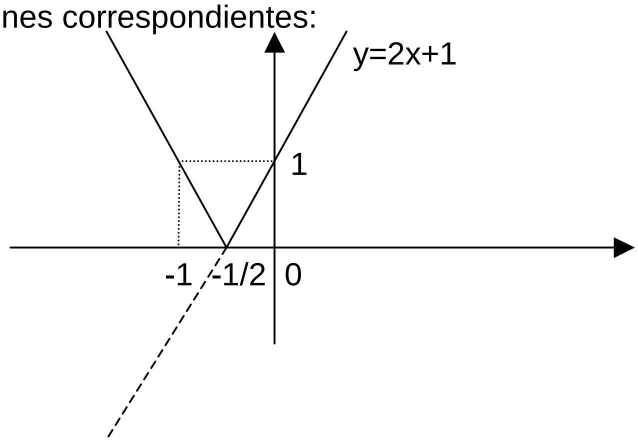
1) $f : f(x) = |2x+1|$

Teniendo en cuenta las propiedades vistas, el signo de f(x) es :

$\text{sig}|2x+1|$ + + + + + + 0 + + + + + + +

$-\frac{1}{2}$

Para graficar, con el criterio anterior, graficamos y=2x+1, haciéndole las transformaciones correspondientes:



FUNCIONES DEFINIDAS POR ZONAS

2) $f : f(x) = \left| x^2 - x \right| + 2x$

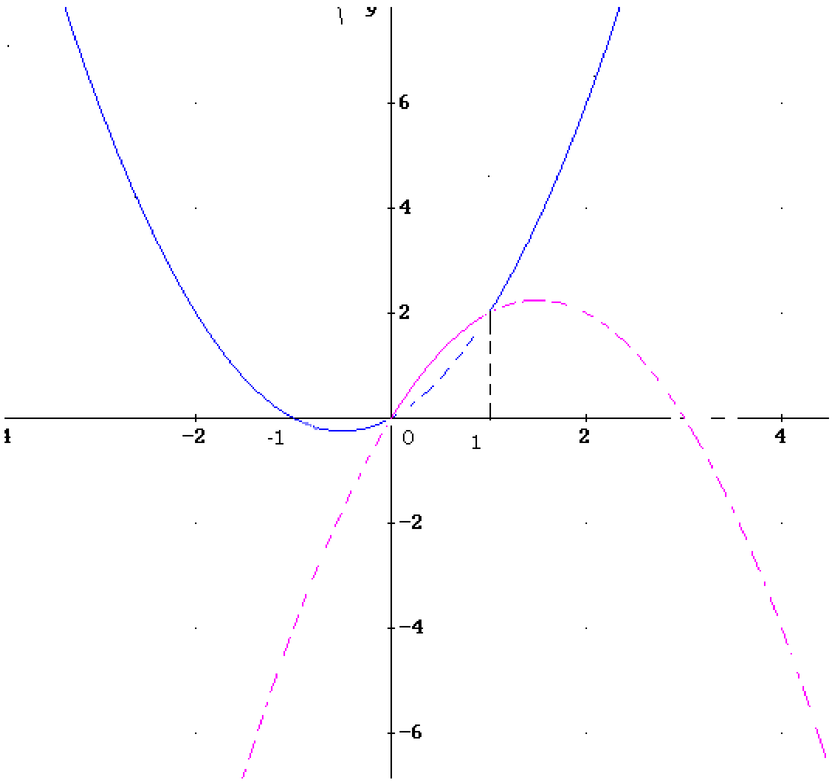
En este caso no podemos aplicar el criterio anterior pues hay expresión fuera del valor absoluto. Se empleará entonces la definición de valor absoluto, para lo cual deberá estudiarse el signo de $x^2 - x$:

sig $(x^2 - x)$ + + + + + + 0 - - - - - 0 + + + + + + + +

0 1

Esto nos permite expresar f(x) en cada una de las zonas que establece el signo:

$f(x)$: $x^2 - x + 2x = x^2 + x$ | 0 | $-x^2 + x + 2x = -x^2 + 3x$ | 1 | $x^2 + x$



De acuerdo a la gráfica deducimos :

sig f(x) + + + + + + + 0 - - - - - 0 + + + + + + + + + + + +

-1 0 x

5) Realizar la RG de las siguientes funciones:

$a)\ f\ /\ f(x) = |x-3| \quad b)\ f\ /\ f(x) = |x^2 - 2x - 3| \quad c)\ f\ /\ f(x) = \left|\dfrac{x}{x+1}\right|$

$d)\ f\ /\ f(x) = |4x-2| + 2x + 3 e)\ f\ /\ f(x) = |x^2 - 4| + 3x f)\ f\ /\ f(x) = x^2 + x - |x^2 - 4|$

$g)\ f\ /\ f(x) = |x+3| + |x+5| \quad h)\ f\ /\ f(x) = x - 1 + \left|\dfrac{x-3}{x}\right|$

Función Signo:

Definiremos una nueva función, la `Función Signo`:

$$f\ /\ f(x) = sg(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

GRAFICAR DICHA FUNCIÓN
CUÁL ES SU DOMINIO?

6) (A) Estudiar las siguientes funciones:

a) $f\ /\ f(x) = sg(x-2)$ b) $f\ /\ f(x) = sg(x^2 - 2)$ c) $f\ /\ f(x) = sg(x^3 - 5)$

d) $f\ /\ f(x) = (x^2 - 4x).sg(6 - 3x)$

(B) Demostrar que

$$|x| = x.(sg(x))$$

7) Estudiar dominio, signo y esbozo gráfico de las siguientes funciones:

a) $f\ /\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 3 \\ x^2 - 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **b)** $f\ /\ f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < o \\ 1 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $f\ /\ f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$