# Cotas y extremos

CURSO 6toI, Mat "A" Profs.:Sergio Weinberger - Marcelo Valenzuela - 2010

Sea $A=(3,5]\cup(7,9]$

Obs:

$4\in A$ $\quad 2\notin A$ $\quad 9\geq x\ \forall x\in A$ $\quad 20\geq x\ \forall x\in A$

**Definiciones:**

Dado un conjunto A de números reales.

- k es cota superior de un conjunto A $\Leftrightarrow k\geq a\ \forall a\in A$
- k es cota inferior de un conjunto A $\Leftrightarrow k\leq a\ \forall a\in A$

- Si existe una cota inferior de un conjunto, decimos que está acotado inferiormente.
- Si existe una cota superior de un conjunto, decimos que está acotado superiormente.
- Un conjunto se denomina acotado, cuando está acotado superior e inferiormente.

Indicar acotación de los siguientes conjuntos:

$\mathbb{N}$ $\quad A=(3,5]\cup(7,+\infty)$ $\quad B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$

● **Definición de extremo:**

x es extremo superior de A si y sólo si, es cota superior de A y es menor o igual que cualquier cota superior de A.

Ejercicio:

Sean $A=\{x\in\mathbb{N}/x^2<50\}$ y $B=\{x\in\mathbb{Q}/x^2<50\}$

a) Deducir 3 elementos de cada conjunto. ¿Existen elementos del conjunto mayores que ellos?

b) Indique 3 cotas superiores de cada conjunto.

c) Indique una cota superior "lo mas chica posible" de B.

● **Axioma de Completitud**.

$$\left.\begin{array}{r} A\subseteq\mathbb{R} \\ A\neq\emptyset \\ A \text{ acotado superiormente}\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\ \overline{ext}\ A$$

- Consecuencia del axioma:

$$\left.\begin{array}{r} A\subseteq\mathbb{R} \\ A\neq\emptyset \\ A \text{ acotado inferiormente}\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\ \underline{ext}\ A$$

Existe por lo tanto el extremo superior de B, el cuál llamamos $\sqrt{50}$

- Observación: El conjunto de racionales no es completo, pues no verifica el axioma de completitud. Si sólo existiesen números racionales, el conjunto B estaría definido pero no tendría extremo superior.

**Ejercicio**:
Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que el extremo superior de A es 5
Indicar si las siguientes afirmaciones son V o F:

1. Cualquier elemento de A es menor que 5.
2. Cualquier número menor que 5 pertenece al conjunto A
3. $2\pi$ es cota superior de A.
4. Hay algún elemento del conjunto mayor que 19/4
5. Las cotas inferiores de A, si existen, son menores que 5.

**Obs**:
Sea A un conjunto no vacío y acotado.
Entonces se verifica que $\underline{ext}\, A \leq a \leq \overline{ext}\, A \; \forall a \in A$

**Definición de Máximo y Mínimo**
-Decimos que M es máximo de un conjunto A sí y sólo sí:
$$M = \overline{ext}\, A \\ \wedge \\ M \in A$$
-Decimos que m es mínimo de un conjunto A sí y sólo sí:
$$m = \underline{ext}\, A \\ \wedge \\ m \in A$$

Obs: Se verifican las ideas intuitivas de $M \geq x$ y $m \leq x$ $\forall x \in X$
¿por qué? (justifique con definiciones)

**Ejercicio:**
Estudiar acotación, extremos , máximos y mínimos de los siguientes conjuntos:
$$A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \leq 0\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 4)(x+3) \geq 0\}$$
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x-4}{x+3} \leq 0\right\}$$

**Propiedad de Arquímedes:**
- *El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.*
- Es equivalente a probar que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / n > x$

**Se recomienda la lectura de "**Existencia de raíz cuadrada de 2"[1]

1 Libro sugerido: Introducción al Análisis Matemático – Belcredi, Zambra, Deferrari Págs 24 y 25

Ejercicios:
Estudiar acotación y extremos de los siguientes conjuntos, demostrando afirmaciones:

$$A=\left\{\frac{2}{n}\,;\,n\in\mathbb{N}^*\right\} \qquad B=\left\{\frac{2n+3}{n}\,;\,n\in\mathbb{N}^*\right\} \qquad C=\left\{\frac{2}{\sqrt{n+1}}\,;\,n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$D=\left\{\sqrt{n-5}\,;\,n\in\mathbb{N},\,n\geq 5\right\}$$

**Conjunto A**

1) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$:

$$n\geq 1 \quad\Rightarrow\quad 1\geq\frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad 2\geq\frac{2}{n} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

- Entonces 2 es cota superior del conjunto A.
  Cualquier número mayor que 2 también será cota superior de A (prop. transitiva)
- Como 2 pertenece al conjunto, cualquier número menor que 2 no es cota superior, porque hay un elemento mayor que él (el 2).
  Por lo tanto 2 es el extremo superior de A.
- Conjunto de cotas superiores: $[2,+\infty)$

2) $\frac{2}{n}>0 \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$ Entonces 0 es cota inferior del conjunto A

- Por transitiva cualquier número menor que 0 también es cota inferior de A
- Probemos que no hay cotas inferiores mayores que 0, y por lo tanto, 0 será el extremo inferior.

  $$\forall\, x>0 \;:\qquad \frac{2}{n}<x\Leftrightarrow\frac{2}{x}<n$$

  Por propiedad de Arquímedes, existe un natural *n* tal que $n>\frac{2}{x}$ por lo tanto, existe un elemento del conjunto menor que x.
  De ésto se desprende que x no puede ser cota inferior, cualquiera sea $x>0$.
  Como no hay cotas inferiores mayores que 0 y 0 es cota inferior, entonces es el extremo inferior.

- Conjunto de cotas inferiores $(-\infty,0]$

**Conjunto B:**
Para probar que 2 es el extremo inferior de B se sugiere considerar un real x positivo cualquiera y verificar que existe algún elemento del conjunto menor que 2+x

**Conjunto C:**
Probaremos que no está acotado superiormente:

$\forall\, k>0$

$$\sqrt{n-5}>k \quad\Leftrightarrow\quad n-5>k^2 \quad\Leftrightarrow\quad n>k^2+5$$

$\forall\, k>0$ (por Arquímedes), existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n>k^2+5$ , por lo tanto existe algún elemento del conjunto mayor que k.
Ésto prueba que k no puede ser cota superior, por consiguiente C no está acotado

## *Ejercicios del tema:*

1. Investiga si los siguientes conjuntos están acotados, y en tal caso, indicar el conjunto de las cotas (superiores e inferiores). Indicar extremos y máximos o mínimos si existen.

   A = $\{x\in\Re / 2x + 3 \le 6\}$ B = $\{x\in\Re / x^2 + x > 2\}$ C = $\{x\in\Re / \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$

   D = $\{x\in \mathbb{Z} / 2x < 6\}$ E = $\{x\in \mathbb{Z} / 2x^2 + 3 < 1\}$ F = $\{x\in R / \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+6} < 3\}$

   G = $\{ x \in \mathbb{R} / \left|\frac{x^2+8}{3x}\right| < 2 \}$ H= $\{ x \in \mathbb{R} / \left|\frac{2x+4}{-x}\right| < 3x+1 \}$ I = $\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{2x+1} < |3x-1| \}$

2. Investigar si los siguientes conjuntos están acotados. Indicar si existen extremos, máximos y mínimos.

   N Q A = $\{3n+1, n\in N\}$ B = $\{1/n;\ n\in N^*\}$ C = $\{\frac{1}{3n}+1;\ n\in N^*\}$

   D = $\{\frac{3n+1}{3n};\ n\in N^*\}$ E = $\{(-1)^n;\ n\in N\}$ F = $\{\frac{(-1)^n}{n};\ n\in N^*\}$

   G = $\{0; 0{,}9; 0{,}99; 0{,}999; 0{,}9999; .... 0{,}999999...\}$ H = $\{(-1)^n\left(\frac{n-4}{n}\right);\ n\in N^*\}$

   I = $\{\frac{1}{2^n};n\in N\}$ J = $\{ L(n);\ n\in N^*\}$

3. ¿Verdadero o Falso?
   i) El conjunto vacío carece de máximo.
   ii) Todo conjunto no vacío tiene un mínimo.
   iii) Todo conjunto finito no vacío tiene un mínimo.

4. ¿Verdadero o Falso? Justifique.

***Siendo A es un conjunto de números reales NO VACÍO y tal que su extremo superior es 3 y el inferior -2***

- Todo elemento del conjunto A es menor o igual que 3
- Todo número menor que 3, pertenece a A.
- Todo número menor que –l, no pertenece a A.
- Todo número menor que –2, es cota inferior de A.

5. ¿Verdadero o Falso? Justifique
   - Todo conjunto de racionales que esté acotado tiene extremo superior.
   - Todo conjunto de racionales que esté acotado tiene extremo superior que es un número racional.

6. **Demostrar** que $\forall x\in\Re$, $x > 0$; existe un natural n, tal que $\frac{10}{n+3} < x$

7. a) Demostrar cualquier número positivo, no puede ser cota inferior del conjunto $\{1/n ;\ n\in N^*\}$

   b) Demostrar cualquier número mayor que 1, no puede ser cota inferior del conjunto $\{\frac{n+1}{n};\ n\in N^*\}$

8. Dados los siguientes conjuntos, intuir extremos y demostrar que efectivamente lo son:

   P = $\{\frac{1}{3n}+1;\ n\in N^*\}$ Q = $\{\frac{n+1}{3n}+1;\ n\in N^*\}$

9. Demostrar que los siguientes conjuntos no están acotados:

   R = $\{ n+3;\ n\in N\}$ S = $\{ n^2+3n;\ n\in N\}$ T = $\{ L\left(\sqrt{n+2}\right);\ n\in N\}$

10. Dados dos subconjuntos acotados, no vacíos de R, y sea C = $\{x\in R:\ x = a+b,\ a\in A \text{ y } b\in B\}$

    a) Demostrar que para todo $x\in C \Rightarrow x \le \overline{\text{ext}}A + \overline{\text{ext}}B$. ¿Esto qué implica de $\overline{\text{ext}}A + \overline{\text{ext}}B$ ?

    b) Demuestre que el extremo superior de C no puede ser menor que $\overline{\text{ext}}A + \overline{\text{ext}}B$.

    c) ¿Qué concluye acerca del extremo superior de C?