Sucesiones

6º Ing, Mat "A" - Liceo Nº 3 - Profs.:Sergio Weinberger - Marcelo Valenzuela – 2010

Introducción:
Así como f es una función y f(x) = 2x es la imagen de cada x, donde f(0) = 0 y f(3) = 6, en una sucesión la anotaremos:

$$(a_n) : a_n = 2\text{n}$$

Que las imágenes de 0 y 3 son 0 y 6 respectivamente lo escribimos:

$$a_0 = 0 \qquad a_3 = 6$$

En general $a_n = 2n$ refleja "la misma información" que $f(x) = 2x$, sólo que acostumbramos a trabajar con funciones reales (por lo tanto x es real) y en las sucesiones el dominio está incluido en el conjunto de los naturales (n es natural)

Definición:
Una sucesión de números reales, es una función de dominio $\mathbb{N}$ y codominio $\mathbb{R}$

Notación:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Sucesión utilizaremos mas brevemente: (a_n)

a_n : imagen de *n* en la sucesión.

$\{a_n\} = \{a_{0,} a_{1,} \ldots, a_n\}$: Recorrido de la sucesión. (Conjunto de las imágenes)

Ejemplos de sucesiones:

(a_n) definida por $a_n = \dfrac{1}{n}$

Sustituya n por distintos valores y observe que los el recorrido es: $\{a_n\} = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \ldots..\}$

(b_n) definida por $b_n = \dfrac{n+3}{3n-4}$

Ubique los algunos elementos en la recta real, calcule la imagen de 100000, intuya que sucede con los elementos a medida que n es cada vez mayor

(c_n) definida por $c_n = (-1)^n + 2$

Calcule las los elementos c_0, c_1, c_5, c_{10} y observe que $d_{2\text{n}} = 3$ $d_{2\text{n}+1} = 1$
(las imágenes de los pares es 3, y la de los impares es 1)

(d_n) definida por $d_n = \begin{cases} 1 & si \;\; n = 0 \\ n \,.\, d_{n-1} & si \;\; n \neq 0 \end{cases}$

(e_n) definida por $e_n = \begin{cases} 1 & si \;\; n = 0 \\ 3 \,.\, e_{n-1} & si \;\; n \neq 0 \end{cases}$

Para (d_n) y (e_n) :
- Deducir los primeros 3 elementos de cada sucesión ((d_n) y (e_n)
- Opcional:
  Deducir y demostrar una fórmula directa por Inducción Completa.

Otros análisis:

1) Ubique algunos elementos de (a_n) en la recta real y analice algunas de las particularidades de esta sucesión:

$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n)\downarrow$ la sucesión es <u>decreciente</u> $(\text{¿ que queremos decir con esto ? : } a_n > a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N})$

2) Sea $(j_n): j_n = n^2 - 5n$. Observe que es <u>creciente</u> a partir de 3.

También nos permitimos afirmar que $(j_n)\uparrow$

(cuando la desigualdad PARA TODOS los naturales a partir de cierto natural)

Introducción Límites

Retomando (a_n) definida por $a_n = \frac{1}{n}$

* ¿Encontramos un elemento de la sucesión que sea menor que 0,01?

Si, $a_{200} = \frac{1}{200} < 0{,}01$

* Encontrar un elemento de la sucesión que sea menor que 10^{-6}

* ¿Encontramos un elemento de la sucesión que sea menor que ϵ , cualquiera sea ϵ positivo?

Si, precisamos que $\frac{1}{n} < \epsilon$, esto se cumple si y sólo si: $\frac{1}{\epsilon} < n$

Eligiendo "n" lo suficientemente grande, que sea mayor que $\frac{1}{\epsilon}$ obtenemos lo pedido

¿cuán cerca de 0 podemos obtener elementos de nuestra sucesión? :

Respuesta: Todo lo que se quiera.

En este caso, vamos a decir que el límite de (a_n) es 0 o que (a_n) tiende a 0.

Se escribirá $(a_n) \to 0$

Otro ejercicio previo a la definición de límite:

Sea $(a_n): a_n = \frac{n}{n+3}$

Indiquemos algunos elementos del recorrido de la sucesión, y veremos que sucede a medida que n aumenta. *(los resultados parecen aproximarse a 1)*

Una pregunta reiterada:

¿Encontramos un elemento de la sucesión que "esté a menos" de 0,01 del número 1?

Si, $\frac{n}{n+3} > 0{,}99 \Leftrightarrow \frac{n}{0{,}99} > n+3 \Leftrightarrow \frac{n-0{,}99n}{0{,}99} > 3 \Leftrightarrow \frac{0{,}01}{0{,}99} n > 3 \Leftrightarrow n > 3 . \frac{0{,}99}{0{,}01}$

Tomando n = 400 (o cualquier mayor que 297)

¿Encontramos un elemento de la sucesión que "esté a menos" de ϵ $(\epsilon > 0)$ del número 1?

$$\left|1 - \frac{n}{n+3}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n+3-n}{n+3}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3}{n+3}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} < n+3 \Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 3 < n$$

Por ejemplo, si queremos encontrar algún elemento de la sucesión que esté a menos de 0.003 de el número 1, debemos elegir un "n" que sea mayor que 997.

Definición de límite:

Decimos que (a_n) tiene límite l $(l \in \mathbb{R})$ si y solo si:
$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$

<u>Nota</u>: Si una sucesión tiene límite $l (l \in \mathbb{R})$ decimos que **converge**.

Ejercicios:

Deducir límites y probar su veracidad utilizando la definición

$(a_n): a_n = \frac{1}{n+1}$ $\quad (b_n): b_n = \frac{n+5}{3n}$ $\quad (c_n): c_n = L(\frac{n+3}{n})$

Probar que $\left(\frac{k}{n}\right) \to 0$ **k in setR** $\left(3 + \frac{k}{n}\right) \to 0$

Ejercicio resuelto:

Probar que: $\left(\frac{n^2+3n-2}{n^2-1}\right) \to 1$

$\forall \epsilon > 0:$

$$\left|\frac{n^2+3n-2}{n^2-1} - 1\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{n^2+3n-2-(n^2-1)}{n^2-1}\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{3n-1}{n^2-1}\right| < \epsilon$$

Observación: (si n>1)

1) $\left|\frac{3n-1}{n^2-1}\right| < \left|\frac{3n}{n^2-1}\right| < \left|\frac{3n}{n^2-n}\right| = \left|\frac{3}{n-1}\right| = \frac{3}{n-1}$

2) $\frac{3}{n-1} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{\epsilon} < n-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{\epsilon} + 1 < n$

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{\epsilon} + 1 < n_0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{3}{\epsilon} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{n-1} < \epsilon$$

Entonces $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 (n_0 > 1)$

$$\left|\frac{3n-1}{n^2-1}\right| < \frac{3}{n-1} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2+3n-2}{n^2-1} - 1\right| < \epsilon$$

En este ejercicio acotamos la expresión por otra mas sencilla que también verifica la desigualdad a probar, y de esa manera nos aseguramos que la primera desigualdad se verifica.

Probar que:

$$\left(\sqrt{\frac{2n-1}{n}}\right) \to \sqrt{2}$$

Definiciones:

Sucesión acotada superiormente: $\exists k \in \mathbb{R}$ / $a_n \leq k \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Sucesión acotada inferiormente: $\exists k \in \mathbb{R}$ / $a_n \geq k \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Sucesión acotada: $\exists k \in \mathbb{R}$ / $|a_n| \leq k \ \forall\, n \in \mathbb{N}$)

Decir que una sucesión esté acotada, es equivalente a mencionar que su recorrido está acotado.
Las desigualdades de las definiciones son útiles para la demostración de propiedades.

Teorema:

Si una sucesión converge entonces está acotada

¿Qué sucede con el recíproco?

No es cierto... Recordar $(a_n): a_n = (-1)^n$

Otros Teoremas:

* Unicidad del limite.

* Teorema de conservación del signo (T.C.S)

H) $\lim a_n = l$, $l > 0$

T) $\exists n_0 / \forall\, n \in \mathbb{N}\, , n \geq n_0 : a_n > 0$

(análogamente deduzca que sucede si l<0)

¿Será cierto el recíproco?

Considere $(a_n): a_n = \dfrac{1}{n}$

Teorema de la sucesión comprendida:

H) $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall$ n > n_0 ; lim a_n = lim c_n = l

T) $lim\ b_n = l$

Algunas Aplicaciones:

$a_n = \dfrac{sen(n)}{n}$ Acotar por $\dfrac{-1}{n}$ y $\dfrac{1}{n}$ y deducir el límite de (a_n)

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2+i}$$

Acotar cada término por $\dfrac{1}{n^2}$ y observar que $a_n < \dfrac{n}{n^2}$

Definiciones:

Decimos que (a_n) tiene límite $+\infty$ si y sólo si:

$\forall\, k>0\,,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n>n_0 \Rightarrow a_n>k$

Decimos que (a_n) tiene límite $-\infty$ si y sólo si:

$\forall\, k<0\,,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n>n_0 \Rightarrow a_n<k$

Decimos que (a_n) **diverge** si y sólo si tiene límite $+\infty$ o $-\infty$

Probar que $(2\mathrm{n}+3)\rightarrow+\infty$ $\quad(-\sqrt{2\mathrm{n}-4})\rightarrow-\infty$

Teorema

Si $lim\,(a_n)=+\infty$ y $a_n<b_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}\,(n>n_0)$ entonces $lim\,(b_n)=+\infty$

Aplicaciones:

Probar que existe n_0 / $\forall\, n\in\mathbb{N}\,(n>n_0)$, tal que $n^2-3\mathrm{n}-4>n$

Probar que $\lim\sqrt{n^2-3\mathrm{n}-4}=+\infty$

Definiciones (ya mencionado anteriormente)

Decimos que una sucesión (a_n) es creciente si y sólo si para todo n:

$a_{n+1}\geq a_n$

Decimos que una sucesión (a_n) es estrictamente creciente si y sólo si para todo n:

$a_{n+1}>a_n$

Teoremas que vinculan monotonía y límites:

Toda sucesión monótona acotada converge.
Toda sucesión monótona NO acotada diverge.
Toda sucesión monótona tiene límite (C o D)

Ejercicios

1. Verificar utilizando las definiciones de límite:

Si $a_n=\dfrac{2}{n}$ entonces $(a_n)\rightarrow 0$

Si $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ entonces $(a_n)\rightarrow 0$

Si $a_n=\dfrac{2\,n+5}{n}$ entonces $(a_n)\rightarrow 2$

Si $a_n=\dfrac{sen(n)}{n}$ entonces $(a_n)\rightarrow 0$ $\quad(Sug: sen(n)\leq 1\,\forall\, n\in\mathbb{N})$

Si $a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$ entonces $(a_n)\rightarrow 1$

Si $a_n=\dfrac{\cos^2(n)+n^2}{2\mathrm{n}^2}$ entonces $(a_n)\rightarrow\dfrac{1}{2}$

Si $a_n=2n$ entonces $(a_n)\rightarrow+\infty$

Si $a_n=\dfrac{2\,n^2-5}{n}$ entonces $(a_n)\rightarrow+\infty$ $\quad\left(Sug: \dfrac{5}{n}<1 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,,\, n>5\right)$

$(6\mathrm{n}+3)\rightarrow+\infty$ $\qquad (L(n+3)+3)\rightarrow+\infty$

$(\sqrt[5]{5\mathrm{n}+3})\rightarrow+\infty$ $\qquad (1-e^{6\mathrm{n}+5})\rightarrow-\infty$

Par de Sucesiones Monótonas Convergentes

Definición: Decimos que un par de sucesiones son SMC si y sólo si:

1) $(a_n)\uparrow$ $(b_n)\downarrow$ 2) $a_n \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ 3) $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 / \forall n > n_0 \Rightarrow |b_n - a_n| < \epsilon$

Propiedad: Si a_n y b_n son un PSMC entonces existe un único numero real α, tal que:
$a_n \le \alpha \le b_n$ (1) (a α lo llamamos elemento de separación de las sucesiones)

Número e.

Definimos (a_n) y (b_n) :

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n \qquad b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Se verifica que:

1) $(a_n)\uparrow$ $(b_n)\downarrow$ A partir de 2
2) $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}^*$
3) $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 / \forall n > n_0 \Rightarrow |b_n - a_n| < \epsilon$

Como (a_n) y (b_n) son un P.S.M.C, tiene un elemento de separación que lo llamamos **Número e**

Demostraciones (lectura opcional):

(1) El teorema es mas generalizable a par de clases contiguas

Sea A = { a_n } y B = { b_n }

Por 2 A está acotado superiormente y B inferiormente (ademas, de que (b_n) decreciente)

Por lo tanto existe α_1 y α_2 tal que:

$$\alpha_1 = \overline{ext}\{a_n\}$$
$$\alpha_2 = \underline{ext}\{b_n\}$$

Probemos que α_1 no puede ser menor que α_2, ni mayor.

Suponemos: $\alpha_1 < \alpha_2$

Sea $\epsilon = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$

Como: $a_n \le \alpha_1$ y $\alpha_2 \le b_n \forall n \in \mathbb{N}$ Entonces $b_n - a_n \ge \alpha_2 - \alpha_1 > \epsilon$

Si $\alpha_2 < \alpha_1$

Existe a_n tal que $a_n > \alpha_2$ (sino α_1 no seria extremo superior)

y Existe b_m tal que $b_m < a_n$ (sino α_2 no seria extremo inferior)

Si n<m consideramos $a_m \, y \, b_m$ (y si n>m comparamos $a_n \, y \, b_n$)

Usando 1, llegamos a que $a_m > b_m$ contradice "2"

(2)Probar

1) Probaremos que $\frac{a_n}{a_{n-1}} \ge 1$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n-1})}\right)^{n.} \left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^{n.} \left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n.}\left(\frac{n}{n-1}\right)\geq\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)=1$$

Obs: $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\geq 1-\frac{1}{n}$ Aplicando Bernoulli.

2) Trivial

3) $b_n-a_n=(1+\frac{1}{n})^n(1/n)<a_n(\frac{1}{n})<b_0.(\frac{1}{n})<\epsilon$ a partir de algún n.

Aplicación:

Como el número e es elemento de separación de las sucesiones $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ y $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

Entonces: $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Una sucesión muy particular:

$$a_1=1$$
$$a_2=1+\frac{1}{2}$$
$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

Demostraremos que (a_n) diverge.

Tenemos que:

$\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad (1+\frac{1}{n})^n<e\Rightarrow L(\frac{n+1}{n})^n<L(e)\Rightarrow n.L(\frac{n+1}{n})<1\Rightarrow\quad L(n+1)-L(n)<\frac{1}{n}$

Por consiguiente:

$$L(2)-L(1)<1$$
$$L(3)-L(2)<\frac{1}{2}$$
$$L(4)-L(3)<\frac{1}{3}$$

$L(n+1)-L(n)<\frac{1}{n}$ (sumamos...)

$$L(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=a_n$$

Al estar (a_n) minorada por una sucesión que diverge, ésta también diverge.

Límites de Operaciones con Sucesiones

Suma

(a_n) / (b_n)	a	$+\infty$	$-\infty$
b	a+b	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	¿?
$-\infty$	$-\infty$	¿?	$-\infty$

Ejemplo de interpretación de la tabla:

Teorema:

$$\left.\begin{array}{l}(a_n)\to a\\(b_n)\to b\end{array}\right\}\Rightarrow(a_n+b_n)\to a+b$$

Demostración:

Como hipótesis tenemos:

$(a_n)\to a\Leftrightarrow\forall\,\epsilon_1>0\,,\exists n_1\in\mathbb{N}/\forall\,n>n_1\Rightarrow|a_n-a|<\epsilon_1$ y

$(b_n)\to b\Leftrightarrow\forall\,\epsilon_2>0\,,\exists n_2\in\mathbb{N}/\forall\,n>n_2\Rightarrow|b_n-b|<\epsilon_2$

Queremos probar que

$(a_n+b_n)\to a+b$

Esto significa que:

$\forall\,\epsilon>0\,,\exists n_0\in\mathbb{N}/\forall\,n>n_0\Rightarrow|(a_n+b_n)-(a+b)|<\epsilon$

Trabajemos entonces con $|(a_n+b_n)-(a+b)|$:

$|(a_n+b_n)-(a+b)|=|a_n-a+b_n-b|\le|a_n-a|+|b_n-b|$ (utilizamos desigualdad triangular)

Dado $\epsilon>0$ puedo encontrar por hipótesis:

$\exists n_1\in\mathbb{N}/\forall\,n\ge n_1|a_n-a|<\frac{\epsilon}{2}$

$\exists n_2\in\mathbb{N}/\forall\,n\ge n_2|b_n-b|<\frac{\epsilon}{2}$

Para todos los "n" mayores que el mayor entre n_1 y n_2 se verifican las dos desigualdades.
Entonces:
Siendo $n_0=max\{n_1\,,n_2\}$

$\forall\,\epsilon>0\,,\exists n_0\in\mathbb{N}/\forall\,n>n_0\Rightarrow|(a_n+b_n)-(a+b)|\le|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$

Por transitiva concluimos la tesis.

Multiplicación

(a_n) / (b_n)	$a(a>0)$	$a(a<0)$	*0*	$+\infty$	$-\infty$
$b(b>0)$	ab	ab	0	$+\infty$	$-\infty$
$b(b<0)$	ab	ab	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	¿?	¿?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	¿?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	¿?	$-\infty$	$+\infty$

División: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

(a_n) / (b_n)	$a(a>0)$	$a(a<0)$	*0*	$+\infty$	$-\infty$
$b(b>0)$	a/b	a/b	0	$+\infty$	$-\infty$
$b(b<0)$	a/b	a/b	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	¿?	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	¿?	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	¿?	¿?
$-\infty$	0	0	0	¿?	¿?

Obs:

$lim\,(a_n)=a^+ \Leftrightarrow \forall\, \epsilon>0\,, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \geq n_0 \quad 0<a_n-a<\epsilon$

$lim\,(a_n)=a^- \Leftrightarrow \forall\, \epsilon>0\,, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \geq n_0 \quad 0<a-a_n<\epsilon$

Potencia $\left(a_n^{b_n}\right)$

Usando $a_n^{b_n}=e^{b_n \,.\, L(a_n)}$ podemos calcular su límite usando propiedades vistas.

Obs:

No tenemos por ahora herramientas para calcular el límite de $\left(a_n^{b_n}\right)$ cuando:

$(a_n)\to 0^+$ y $(b_n)\to 0$; $(a_n)\to +\infty$ y $(b_n)\to 0$; $(a_n)\to 1$ y $(b_n)\to \pm\infty$

Además se pueden demostrar propiedades más generales como:

Si $(a_n)\to \pm\infty$ y (b_n) acotado entonces $(a_n+b_n)\to \pm\infty$.

Si $(a_n)\to \pm\infty$ y (b_n) acotado entonces $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\to 0$.

Ejercicios – Bloque 2

1. Calcular los límites de cada una de las siguientes sucesiones:

$(a_n): a_n = \frac{5}{1-3n}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{\sqrt[5]{132\pi}}{1+n}$

$(a_n): a_n = \frac{5n+5}{3}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{5n+5}{4n}$

$(a_n): a_n = \frac{5n-5n^2}{n}$ $\quad$ $(a_n): a_n = 5n(1-n)$

$(a_n): a_n = 5n-5n^2$ $\quad$ $(a_n): a_n = 5L(n)+2n$

$(a_n): a_n = \frac{L(1/n)}{(1/n)+3}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{L\left(\frac{1+n}{n}+3\right)}{n+7}$

$(a_n): a_n = \frac{e^{2n}+1}{e^n}$ $\quad$ $(a_n): a_n = L\left(\frac{n+1}{n^2}\right)+e^{5/n}$

$(a_n): a_n = e^{-3n}+1/n+7e^{1/n}$ $\quad$ $(a_n): a_n = L\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}$

2. Calcular los siguientes límites:

Siendo $x_n = \frac{1}{2n}$

$\lim \; x_n$ $\quad$ $\lim \; x_n + e^{x_n}$

$\lim \; L(x_n)+2$ $\quad$ $\lim \; \frac{(x_n)^2+x_n}{(x_n)^2+3x_n}$

$\lim \; \frac{1/x_n+3}{x_n-1}$ $\quad$ $\lim \; L\left(e^{x_n}+3\right)$

3. Calcular los siguientes límites:

$\lim \; L(2x_n+5)-L(x_n)$ $\quad$ Cuando: $(x_n)\to+\infty$; $(x_n)\to 0^+$

$\lim \; e^{2x_n}-e^{x_n}$ $\quad$ Cuando: $(x_n)\to+\infty$

$\lim \; \frac{(x_n)^2-x_n+3}{3(x_n)^2+5}$ $\quad$ Cuando: $(x_n)\to+\infty$

$\lim \; \frac{x_n-6}{(x_n)^2-36}$ $\quad$ Cuando: $(x_n)\to-\infty$; $(x_n)\to 6$

$\lim \; \frac{(x_n)^2-x_n-2}{(x_n)^3-4x_n}$ $\quad$ Cuando: $(x_n)\to+\infty$; $(x_n)\to 2$

$\lim \; \frac{L(4(x_n)^2)}{L(2x_n)}$ $\quad$ Cuando: $(x_n)\to+\infty$

Sucesiones – Equivalentes

Recordamos $\quad lim\ \frac{n^2+3\text{n}}{n^2}=1$

Definición:

$$\boxed{x_n \sim y_n \Rightarrow lim\ \frac{x_n}{y_n}=1}$$

Obs: Si el límite del cociente es 1, queda excluida la posibilidad de que y_n o x_n tengan infinitos términos nulos.

Ejemplo $\quad n^2+3\text{n} \sim n^2$

$n^2+1 \sim n^2$

Se puede verificar que "la transitiva" se cumple.

Teoremas:

$$\left.\begin{array}{c} x_n \sim y_n \\ lim\ x_n . a_n = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow lim\ y_n . a_n = \beta$$

$$\left.\begin{array}{c} x_n \sim y_n \\ lim\ \frac{a_n}{x_n} = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow lim\ \frac{a_n}{y_n} = \beta$$

Aplicación:

$$\left.\begin{array}{c} n^2-3\text{n}+1 \sim n^2 \\ 3\text{n}^2-5\text{n} \sim 3\text{n}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow lim\ \frac{n^2-3\text{n}+1}{3\text{n}^2-5\text{n}} = lim\ \frac{n^2}{3\text{n}^2} = 1/3$$

Generalización : $\quad a_p . n^p + ... + a_0 \sim a_p n^p \quad$ y un poco más en general aún:

Si $\quad (x_n) \to \pm\infty \quad : \quad a_p . x_n^p + ... + a_0 \sim a_p x_n^p$

<u>*¡OJO Con con las restas!*</u>

$n^2+n \sim n^2$

Pero si intentamos sustituir por un equivalente en una resta, es muy probable que cometamos un error:

$\lim\ (n^2+n)-(n^2+5) \overset{?}{=} \lim\ n^2-n^2=0$ $\times$ **MAL !!!**

Porque:

$\lim\ (n^2+n)-(n^2+5) = \lim\ n-5=+\infty$

Ejercicio:

Probar que si $\quad (x_n) \to 0 (x_n \neq 0\ \forall\ n > p) \quad$ entonces

$4 x_n^2 + 2 x_n \sim 2 x_n$

Calcular:

$$lim\ \frac{x_n^2-3\,x_n+2}{x_n}-x_n \qquad (x_n)\rightarrow -\infty$$

Mas ejemplos:
¿Son las siguientes afirmaciones correctas?

$$\sqrt{n^2+3\mathrm{n}+8}\sim\sqrt{n^2}$$
$$e^{n^2+3\mathrm{n}+8}\sim e^{n^2}$$
$$L(n^2+3\mathrm{n})\sim L(n^2)$$

Demostrar lo afirmado

Propiedad: (Generalización del ejemplo anterior):
Sea $(x_n)\rightarrow 0^+$ o $(x_n)\rightarrow +\infty$ y $(x_n)\sim(y_n)$
Entonces $L(x_n)\sim L(y_n)$

Observación: $lim\,(a_n)=1 \Leftrightarrow lim\,(a_n-1)=0$

Probar que $\sqrt{n^2+3\mathrm{n}}+\sqrt{n^2+6\mathrm{n}}\sim 2\mathrm{n}$

Aplicación:
Calcular lim $\sqrt{n^2+3\mathrm{n}}-\sqrt{n^2+6\mathrm{n}}$

Propiedad: (generalización del anterior)

$$\left.\begin{array}{l} x_n\sim k\,.\,a_n \\ y_n\sim h\,.\,a_n \\ k+h\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow x_n+y_n\sim(k+h)a_n$$

Calcular:

$$lim\ \frac{\sqrt{x_n}-1}{x_n-1} \quad \text{si} \quad (x_n)\rightarrow 1\,(x_n\neq 1)$$

Infinitésimos equivalentes
$(a_n)\rightarrow 0(a_n\neq 0\,\forall\, n>p)$ entonces decimos que (a_n) es un infenitésimo

Propiedades:
Siendo (a_n) un infenitésimo:

$L(1+a_n)\sim a_n$	$a^{a_n}-1\sim L(a)\,.\,a_n \quad (a>0)$	$e^{a_n}-1\sim a_n$
$sen(a_n)\sim a_n$	$\cos(a_n)\sim 1-\frac{(a_n)^2}{2}$	$\tan(a_n)\sim a_n$

Demostraciones:

** $L(1+a_n) \sim a_n$

Si $(1+1/n)^n \to e$ aceptamos que

$(1+a_n)^{1/a_n} \to e$ con $(a_n) \to 0$

Entonces $L(1+a_n)^{1/a_n} \to L(e)=1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{a_n}.L(1+a_n) \to 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{L(1+a_n)}{a_n} \to 1$

Con un cambio de variable el equivalente puede expresarse:

$L(a_n) \sim a_n - 1$ si $(a_n) \to 1$

** $a^{a_n} - 1 \sim L(a).a_n \quad (a>0) \quad (a_n) \to 0$

$L(1+a^{a_n}-1) \sim a^{a_n}-1 \Rightarrow L(a^{a_n}) \sim a^{a_n}-1 \Rightarrow a_n L(a) \sim a^{a_n}-1$

En particular si a = e se obtiene: $e^{a_n} - 1 \sim a_n$

Calcular:

$lim\, n^2 L(1+5/n)$

$lim\, n\, L(1+5/n)$

$lim\, (1+5/n)^n$ ¿se puede generalizar algo? ¿que sucede si cambiamos el 5 por otro número?

$lim\, \dfrac{L(1+1/n)}{n^2}$ ¡¡ no se precisa equivalentes !!

$lim\, (n+1)e^{5/n} - n$

Criterio de D' Alambert para sucesiones

Sea (a_n) una sucesión de <u>términos positivos</u> y $lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\alpha$ entonces:

1. Si $\alpha<1\Rightarrow(a_n)\rightarrow 0$
2. Si $\alpha>1\Rightarrow(a_n)\rightarrow+\infty$

Demostración:

1) Si $lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\alpha$ y $\beta=\frac{1+\alpha}{2}$ se cumple que $\alpha<\beta<1$

Por definición de límite, tomando el radio del entorno menor que la diferencia entre β y α , existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $\forall\, n\in\mathbb{N}/n\geq p$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\beta$ $\Rightarrow$ $a_{n+1}<\beta\,.\,a_n$ (tener presente que $a_n>0$)

La última desigualdad para n = p, n = p+1; n = p+2 ...

$$a_{p+1}<\beta\,.\,a_p$$
$$a_{p+2}<\beta\,.\,a_{p+1}$$
$$\vdots$$
$$a_n<\beta\,.\,a_{n-1}$$
$$a_{n+1}<\beta\,.\,a_n$$

(Multiplicando y simplificando):

$$a_{n+1}<\beta^{n-p+1}.\,a_p \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}<\beta^n.\left(\beta^{1-p}.\,a_p\right)$$

Dado cualquier ϵ positivo, como $\beta<1$, existe n_0 tal que para todo $n\in\mathbb{N}/n\geq n_0$, $\beta^n.\left(\beta^{1-p}.\,a_p\right)<\epsilon$ (observar que el segundo factor es constante)

Entonces $\forall\, n\in\mathbb{N}/n\geq max\{n_0,p\}$ $a_{n+1}<\epsilon$

2) Si $\beta=\frac{1+\alpha}{2}$ ahora se cumple $\beta>1$. Realizando un procedimiento similar, acote a_{n+1} por una expresión menor, que tienda a infinito.

Aplicaciones (ORDENES DE INFINITOS):

1) Demostrar que $lim\left(\frac{n^{\alpha}}{b^{n}}\right)=0$ con b>1, α > 0
2) Demostrar que $lim\left(\frac{a_n^{\alpha}}{b^{a_n}}\right)=0$ con $lim\,(a_n)=+\infty,\ b>1\ \ y\ \ \alpha>0$
3) Demostrar que $lim\left(\frac{L^{\alpha}(n)}{n^{\beta}}\right)=0$ con α y β positivos.
4) Demostrar que $lim\left(\frac{L^{\alpha}(a_n)}{(a_n)^{\beta}}\right)=0$ con α y β positivos y $(a_n)\rightarrow+\infty$.

Algunas demostraciones:

2) Consideremos $([a_n])$ (parte entera de a_n); se cumple que : $[a_n]\leq a_n<[a_n]+1$
(Obs: $([a_n])\rightarrow+\infty$)

$$\left(\frac{a_n^{\alpha}}{b^{a_n}}\right)<\left(\frac{([a_n]+1)^{\alpha}}{b^{[a_n]}}\right)<\left(\frac{([a_n]+[a_n])^{\alpha}}{b^{[a_n]}}\right)<\left(\frac{(2[a_n])^{\alpha}}{b^{[a_n]}}\right)<\left(2^{\alpha}.\frac{([a_n])^{\alpha}}{b^{[a_n]}}\right)$$

Observemos que $(c_n):c_n=\left(\frac{[a_n]^{\alpha}}{b^{[a_n]}}\right)$ tiene límite 0:

Como $(a_n)\rightarrow+\infty \quad\Rightarrow\quad \forall k>0,\exists n_1/\forall n>n_1\Rightarrow a_n>k$
y $lim\left(\frac{n^{\alpha}}{b^{n}}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \forall\epsilon>0,\exists n_2/\forall n>n_2\Rightarrow\frac{n^{\alpha}}{b^{n}}<\epsilon$
Tomando k entero mayor n_2 se cumple entonces que $c_n<\epsilon$ para todo n natural mayor que n_1 .

Por consiguiente $\left(\frac{a_n^{\alpha}}{b^{a_n}}\right)$ es positiva y está acotada por la sucesión (c_n) que tiende a 0.
Entonces su límite es 0.

3) Definamos $(z_n):z_n=L(n)$ $\quad(obs:(z_n)\rightarrow+\infty)$

Si $z_n=L(n)\Rightarrow e^{z_n}=n$ y sustituyendo en $\frac{L^{\alpha}(n)}{n^{\beta}}$ nos queda:
$\frac{L^{\alpha}(n)}{n^{\beta}}=\frac{(z_n)^{\alpha}}{(e^{z_n})^{\beta}}=\frac{(z_n)^{\alpha}}{(e^{\beta})^{z_n}}$ observando que $\beta>0\Rightarrow e^{\beta}>1$ concluimos que la última expresión tiende a 0 dado que z_n tiende a $+\infty$ (Por “2”).

Órdenes de infinitos

Definiciones:
Sean (a_n) y (b_n) sucesiones tal que lim a_n = lim b_n = ∞,

- Decimos que son infinitos de igual orden ⇔ $\lim \frac{a_n}{b_n} = l \qquad l \in \mathbb{R}^*$
- Decimos que $ord(a_n) > ord(b_n) \Leftrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$
- Decimos que $ord(a_n) < ord(b_n) \Leftrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 0$

Utilizando lo demostrado anteriormente:

Si $(a_n) \to +\infty$

$$\operatorname{ord}(L^a(a_n)) < \operatorname{ord}(a_n^b) < \operatorname{ord}(e^{c\,a_n}) \qquad \text{con } a>0,\ b>0 \text{ y } c>0$$

Ejercicios - Bloque 3

1) Suponga que $x_n < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y que (x_n) e (y_n) convergen ¿Es necesariamente $lim\ x_n < lim\ y_n$? ¿Puede ser $lim\ x_n > lim\ y_n$?

2) Probar que las siguientes sucesiones son equivalentes:

a) $n^2 + 3n \sim n^2$ b) $\frac{3n^2 - 2n}{n+1} \sim 3n$

c) $\sqrt{n^2 + 3n} \sim n$ d) $\sqrt{(-n)^2 + 3(-n)} \sim n$

e) $\sqrt{(1/n)^2 + 3(1/n)} \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ f) $(n^3 + 5n + 1)^2 \sim (n^3)^2$

g) $L(n^2) + 3 \sim 2L(n)$ h) $((x_n)^2 + 31(x_n) + 154)^3 \sim ((x_n)^2)^3$ si $(x_n) \to \pm\infty$

3) ¿Son equivalentes las siguientes sucesiones? Demostrar su afirmación.

a) $(L(n^2 + 3n))$ y $(L(n^2))$ b) $(L(5n^2 + 3n))$ y $(2L(n))$

c) (e^{2n+1}) y (e^{2n}) d) $((-1)^n n)$ y (n)

4) Calcular los siguientes límites de:

$$\left(\frac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2+1}}\right) \qquad \left(\frac{n!}{2n+3}\right) \qquad \left(\frac{\cos(n\pi)}{n}\right)$$

$$\left(\frac{(n+3)^{23} - n^{15} + 4}{n^{22}}\right) \qquad \left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+1}\right) \qquad \left(\sqrt{3+2n} - \sqrt{2n}\right)$$

5) i. Encuentre un equivalente de la forma $a.n$ con $a \in \mathbb{R}$:

$$(c_n): c_n = \left(L\left(1 + \frac{7}{n}\right)\right)(n^2 + 3n - 8) \qquad (d_n): d_n = \left(\sqrt{169n^2 + 35n}\right)$$

ii. Pruebe que $(c_n + d_n) \sim (20n)$ usando la definición de equivalentes.

6) Calcular los siguientes límites (suponemos que si $(x_n)\to a \Rightarrow x_n \neq a$)

$$\lim_{(x_n)\to 4}\left(\frac{\sqrt{x_n}-2}{x_n-4}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to +\infty}\left(\frac{x_n^{\ 2}-x_n+1}{x_n-1}\right)-x_n$$

$$\lim_{(x_n)\to +\infty}\left(\frac{x_n^{\ 2}-3x_n+1}{x_n-1}\right)-x_n \qquad \lim_{(x_n)\to +\infty}\left(\frac{\frac{x_n^{\ 2}-3x_n+1}{x_n-1}+x_n}{2x_n}\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to 2}\left(\frac{x_n^{\ 4}-3x_n^3+8}{x_n^3-2x_n^2}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to 0}\left(\frac{4x_n^{\ 2}+\sqrt{2}\,x_n}{x_n^3+\sqrt{8}\,x_n}\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to 0^+}\left(\frac{L(x_n+1)}{3x_n^2}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to 1}\left(\frac{L(x_n)}{3x_n^2-3}\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to 0^+}\left(\frac{L(x_n+1)}{\sqrt{x_n}}\right) \qquad \lim\left((e^{1/n}-1)(n^2+3n-4)\right)$$

$$\lim\left((n+3)e^{1/n}-n\right) \qquad \lim\left((2n-5)e^{n/(n+3)}-2en\right)$$

7) Ídem:

$$\lim_{(x_n)\to 0^+}\left(\frac{L\left|\frac{1+x_n}{x_n-1}\right|}{x_n^2-x_n}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to -2}\left(\frac{L(2)-L|x_n|}{x_n^2+2x_n}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to e}\left(\frac{L(L(x_n))}{x_n^2-e^2}\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to 0}\left(\frac{sen(3x_n)}{5x_n}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to 0}\left(\frac{sen(3x_n)}{2x_n\cos(3x_n)}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to 0}\left(\frac{e^{x_n}-\cos(3x_n)}{tg(x_n)}\right)$$

8) Sean (a_n) , (b_n) y (c_n) tres sucesiones tal que:
$(a_n)\to+\infty$, $(b_n)\to+\infty$ y $(c_n)\to+\infty$
Suponiendo que $ord(a_n)>ord(b_n)>ord(c_n)$ pruebe que $ord(a_n)>ord(c_n)$ y úselo para calcular el siguiente límite, justificando cada paso que aplica:

$$\lim\left(\frac{e^{2n-2}}{n}\right)$$

9) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
Demuestre su afirmación o de un contraejemplo según corresponda.

i) $e^{n^2+3n}\sim e^{n^2+3n+1/n}$

ii) $ord(e^{3n+7})>ord(e^{3n})$

iii) $ord((n^2+5)L(n))>ord(n^3)$

iv) $ord((x_n).L(x_n^2)) \underset{x_n\to+\infty}{>} ord(L^3(x_n))$

v) Si $ord(a_n)>ord(b_n)$ y $(a_n)\sim(c_n)$ entonces $ord(c_n)>ord(b_n)$
(a_n y b_n infinitos)

vi) $ord\left(e^{\frac{5n+1}{n-5}}\,\frac{n^2+3}{n}-5\right)<ord\left(L(n)-\sqrt{n}\right)$

10) Complete con "<" , ">" o "=" demostrando lo que afirma:

i) $ord(L(13x_n^2-13x_n)) \underset{(x_n)\to+\infty}{....} ord(L(x_n-3))$ ii) $ord(e^{(13x_n^2-13x_n)}) \underset{(x_n)\to+\infty}{....} ord(e^{(13x_n^2)})$

iii) $ord(n)$ .... $ord(\frac{n^3-5n}{n+3})$ iv) $ord(L(n))$ ..... $ord(L(\frac{n^3-5n}{n+3}))$

11) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{L(3x_n)}{5x_n^3+3}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{L(3x_n)x_n}{5x_n^3+3}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{L(3x_n)^{x_n}}{5x_n^3+3}\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{L(e^{x_n})^3-e^{x_n}}{5x_n^3+3}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{L(3x_n)-2x_n^2+3}{5x_n^2+3\sqrt{x_n}}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{x_n L(3x_n^5)-2x_n^2+3}{e x_n^2+3\sqrt{x_n}}\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{L(3x_n^2-2x_n+3)}{5L(x_n^3+5x_n)+3}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to-\infty}\left(L\left|3x_n\right|e^{x_n}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to+\infty}\left(x_n L(x_n)-x_n\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to+\infty}\left(x_n L(x_n)-\sqrt{x_n^3}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to 0^+}\left(x_n L(x_n)\right) \qquad \lim_{(x_n)\to 3^-}\left((x_n-3)L\left|x_n-3\right|\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to 0^\pm}\left((e^{-1/x_n}-1)\frac{x_n}{x_n+2}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{sen(3x_n)x_n}{5x_n^2}\right) \qquad \lim_{(x_n)\to+\infty}\left(\frac{sen(3x_n)x_n}{5e^{x_n}}\right)$$

12) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{(x_n)\to-\infty} e^{\frac{1}{x_n}}.(x_n^2-3)-x_n^2+L\left|\frac{x_n+3}{x_n-1}\right|2x_n \qquad \lim\,(5n+3)e^{\frac{3}{n}}+L\left(\frac{7n+3}{n}\right)-5n$$

$$\lim_{(x_n)\to+\infty}\left((5x_n+7)e^{\frac{3}{x_n}}-5x_n\right)+\frac{L(1+\sqrt{x_n})}{x_n+3} \qquad \lim\left(sen\left(\frac{2}{n}\right)L\left(\frac{2n+5}{2n}\right)\sqrt{n^5+2n}\,(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)\right)$$

$$\lim_{(x_n)\to-\infty}\left(e^{-3x_n}(2x_n^2+3x_n-\sqrt{2})\right)+\frac{L\left(7x_n^2+x_n\right)}{L\left|2x_n\right|}$$

13) Ídem:

i) $\lim\left(\frac{2e^{n+7}-2}{n^2+7n}L(n)\right)$

ii) $\lim\limits_{(x_n)\to-7}\left(\frac{2e^{x_n+7}-2}{x_n^2+7x_n}L\left|x_n\right|\right)$

iii) $\lim\limits_{(x_n)\to-\infty}\left(e^{3x_n}L\left|2x_n^2+3x_n\right|+5\right)$

iv) $\lim\limits_{(x_n)\to-\infty} L\left|\frac{1}{x_n}\right|+e^{2x_n}(x_n+3)$

v) $\lim\limits_{(x_n)\to 6}\frac{L\left|5-x_n\right|}{x_n^2-36}$

vi) $\lim\limits_{(x_n)\to-\infty} e^{\frac{1}{x_n}}.(x_n^2-3)-x_n^2$

vii) $\lim\limits_{(x_n)\to 1}\frac{e^{2x_n}-e^2}{(3x_n^2-3x_n)^2}.L(x_n)$

viii) $\lim\limits_{(x_n)\to 4}\frac{(e^{x_n-3}-e)}{L(x_n)-L(4)}$

ix) $\lim\left(\frac{e^{\frac{2n-2}{n}}-e^2}{L\left|\frac{5}{n^2}-1\right|}\right)$

14) a) Compruebe que el perímetro de un *n*-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio r es $2rn.\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(sugerencia: deduzca la medida de cada lado de cada uno de los n triángulos determinados)

b) ¿A qué valor se aproxima ese perímetro cuando *n* es muy grande?

c) Calcular el área del n-ágono y deducir su límite. (sug: Deduzca la distancia del centro a cada lado de los triángulos y utilizar $2\,sen(\alpha)\cos(\alpha)=sen(2\alpha)$)

d) Interprete los resultados de los límites.