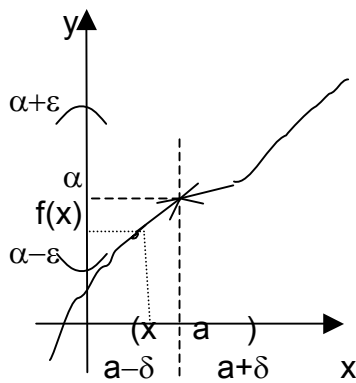


DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall \epsilon (\alpha, \epsilon) \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(\alpha, \epsilon)$$



Es decir que ,dado un entorno cualquiera de centro “ α ”, existe otro de centro “ a ” cuyas imágenes ”caen” en el entorno de centro α .

El entorno de centro “ a ” es reducido con lo cual la existencia o no de $f(a)$ es independiente de que el límite para $x \rightarrow a$ exista o no.

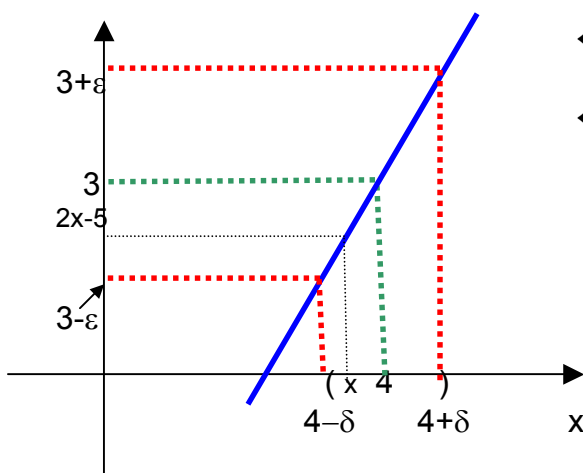
“ δ ”, radio del entorno de centro “ a ”, dependerá de “ ϵ ” y de la función f .

OBSERVACIÓN: $f(x) \in E(\alpha, \epsilon) \Leftrightarrow \alpha - \epsilon < f(x) < \alpha + \epsilon \Leftrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$

Ejemplo : Demostremos, aplicando la definición, que : $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 5) = 3$

De acuerdo a la definición, esto será cierto \Leftrightarrow

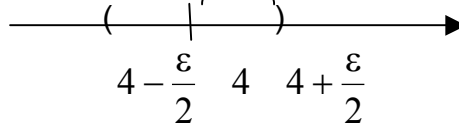
$$\forall \epsilon (3, \epsilon) \exists E^*(4, \delta) / \forall x \in E^*(4, \delta) \Rightarrow 3 - \epsilon < 2x - 5 < 3 + \epsilon$$



$$\xrightarrow{\text{monot., suma 5}} 8 - \epsilon < 2x < 8 + \epsilon$$

$$\xrightarrow{\text{monot., : 2}} 4 - \frac{\epsilon}{2} < x < 4 + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\delta = \epsilon / 2$$



$$\Rightarrow \exists E^*(4, \delta) / \forall x \in E^*(4, \delta) \Rightarrow 3 - \epsilon < 2x - 5 < 3 + \epsilon$$

siendo $\delta = \epsilon / 2$

$$\xrightarrow{\text{por def. lím. finito}} \lim_{x \rightarrow 4} (2x - 5) = 3 \text{ que es lo que queríamos demostrar.}$$

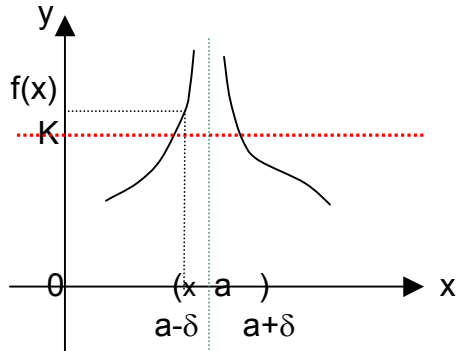
EJERCICIO 1 : Demostrar que : a) $\lim_{x \rightarrow 3} (-x + 5) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow a} (mx + p) = ma + p$

LIMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO:

DEFINICIONES:

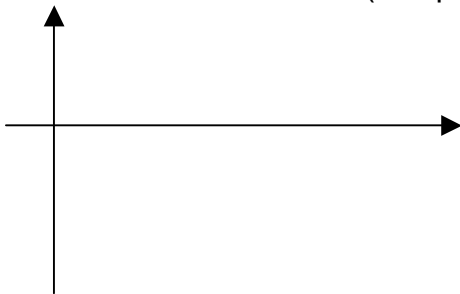
$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \Rightarrow f(x) > K$$



Es decir, $f(x)$ en este caso no está acotada superiormente en un $E^*(a, \delta)$, alcanza valores tan “grandes” como se quiera, tomando el δ adecuadamente. Dicho δ en este caso dependerá de K y de f .

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

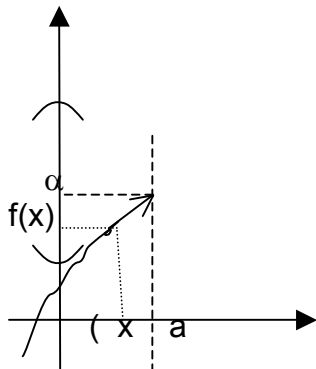
(completar definición y hacer una ilustración gráfica)



LÍMITES LATERALES:

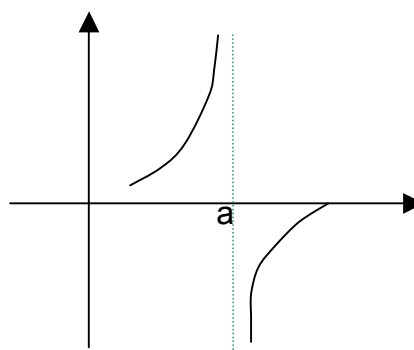
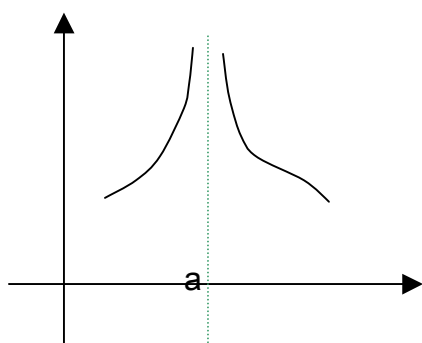
Cualquiera de las definiciones anteriores pueden restringirse a semientornos con lo cual tendríamos la definición de un límite lateral, por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall E(\alpha, \varepsilon) \exists E_-^*(a, \delta) / \forall x \in E_-^*(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(\alpha, \varepsilon)$$

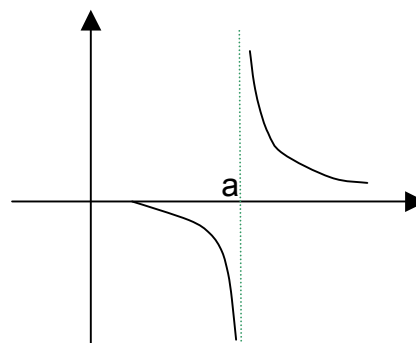
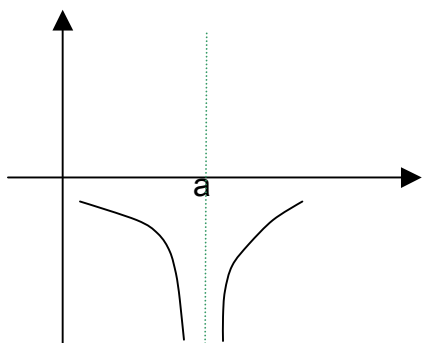


INFINITO "SIN SIGNO"

DEF: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K > 0 \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \Rightarrow |f(x)| > K$



En cualquiera de estos cuatro casos se está en condiciones de la definición.



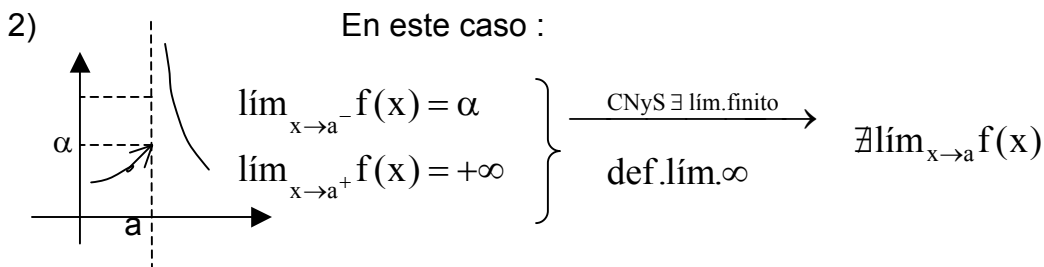
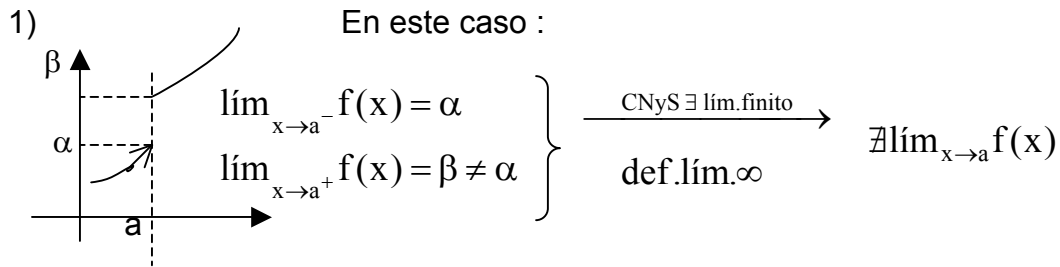
CNyS DE EXISTENCIA DE LÍMITE FINITO

De las definiciones anteriores surge:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \alpha$$

Esta condición y la definición de límite infinito nos permite analizar la existencia de un límite para $x \rightarrow a$.

EXISTENCIA DE LÍMITES-EJEMPLOS:



TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE FINITO

“Si una función tiene límite finito para $x \rightarrow a$, éste es único”.

H $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ T α es único $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Demostación:

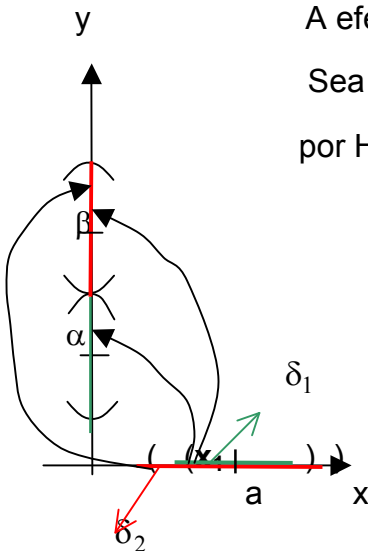
Supondremos por absurdo que, además de α ,

HA) $\exists \beta \in \mathbb{R}$ que también es $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
(hipótesis de absurdo)

A efectos de la demostración, supondremos que $\beta > \alpha$

Sea $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{2} > 0$ un radio de entorno de centro α

por H y def. de lím :



$$\exists \varepsilon^*(a, \delta_1) / \forall x \in \varepsilon^*(a, \delta_1) : \alpha - \frac{\beta - \alpha}{2} < f(x) < \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}$$

y efectuando operaciones : $\frac{3\alpha - \beta}{2} < f(x) < \frac{\alpha + \beta}{2}$

por hipótesis de absurdo :

$$\exists \varepsilon^*(a, \delta_2) / \forall x \in \varepsilon^*(a, \delta_2) : \beta - \frac{\beta - \alpha}{2} < f(x) < \beta + \frac{\beta - \alpha}{2}$$

y efectuando operaciones : $\frac{\alpha + \beta}{2} < f(x) < \frac{3\beta - \alpha}{2}$

por lo tanto si tomamos un $x_1 \in E^*(a, \delta_1) \cap E^*(a, \delta_2)$, deberá cumplirse :

$$\frac{\alpha + \beta}{2} < f(x_1) < \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ lo cual es absurdo.}$$

Este parió de suponer la existencia de otro límite, además de α , (para $x \rightarrow a$)

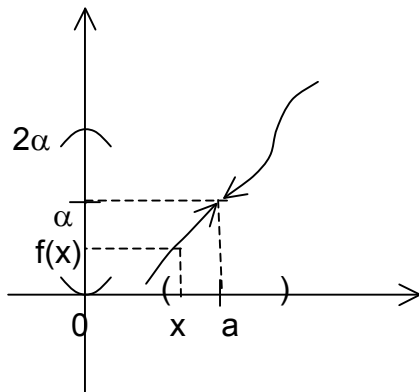
De manera que esto no es posible y α es el único límite para $x \rightarrow a$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE SIGNO.

“Si una función tiene límite finito positivo para $x \rightarrow a$, existe un entorno reducido de centro a en el cual $f(x)$ es también positiva”

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha > 0 \Rightarrow \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \Rightarrow f(x) > 0$$

Demostración:



Dado $\varepsilon = \alpha > 0$, por hipótesis y def. de límite :

$$\exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) : \alpha - \alpha < f(x) < \alpha + \alpha$$

o sea $0 < f(x) < 2\alpha$

Ejercicio 2 :

a) Enunciar y demostrar el teorema de conservación de signo para $\alpha < 0$

b) Demostrar que si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5 \Rightarrow \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \Rightarrow f(x) > 3$$

OPERACIONES CON LÍMITES:

SUMA

f(x)	g(x)	f(x)+g(x)
↓	↓	↓
α	β	$\alpha+\beta$
$+\infty$	β	$+\infty$
$-\infty$	β	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$?

PRODUCTO

f(x)	g(x)	f(x).g(x)
↓	↓	↓
α	β	$\alpha.\beta$
∞	$\beta \neq 0$	∞
∞	∞	∞
∞	0	?
acot	0	0

COCIENTE

f(x)	g(x)	f(x)/g(x)
↓	↓	↓
α	$\beta \neq 0$	α / β
∞	β	∞
α	∞	0
$\alpha \neq 0$	0	∞
∞	∞	?
0	0	?

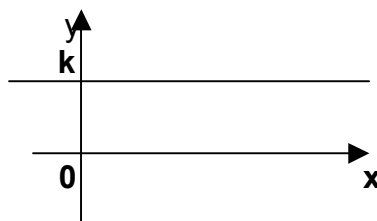
“INDETERMINACIONES” : “ $+\infty-\infty$ ” “ $\infty.0$ ” “ ∞/∞ ” “ $0/0$ ”

LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

1) LÍMITES DE LA FUNCIÓN CONSTANTE:

Sea $f : f(x) = k / k \in \mathbb{R}$. De acuerdo a las definiciones de límite :

$\lim_{x \rightarrow a} k = k$



“el límite de una constante es la propia constante”

2) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ (consecuencia directa de la def. de límite finito)

$$3) \lim_{x \rightarrow a} x^n = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$$

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ teo. lím producto

4) Consecuencia de lo anterior y de los teoremas de límite de la suma y el producto surge :

<p>Si f es una función polinómica $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$</p>
--

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE LÍMITES :
 (se aplicarán los teoremas de las tablas)

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 3x) \cdot (x-1)}{x+3} = 2 \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x^2-1} = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+5}{x^2-4} = -\infty \quad \text{Para determinar si } x^2-4 \text{ tiende a } 0^- \text{ o } 0^+ \text{ le estudiamos}$$

su signo : sig(x^2-4) $\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & + & + & 0 & - & - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & + & + \\ -2 & & & & & \leftarrow & & & & & & 2 & & & & & & & x \end{array}$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 12}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x^2 - 3x - 6)}{(x-2) \cdot (x+2)} = -2$$

Este es el primer caso de indeterminación que nos encontramos.
 Teniendo en cuenta que tanto numerador como denominador tienen raíz 2
 Pueden factorizarse aplicando el teorema de Descartes : $f(x) = (x-2) \cdot Q(x)$
 (siendo $Q(x)$ el cociente de dividir $f(x)$ entre $x-2$).

$$\begin{array}{r} 1 \quad -5 \quad 0 \quad 12 \\ 2 \quad \quad 2 \quad -6 \quad -12 \\ 1 \quad -3 \quad -6 \quad 0 \end{array} \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 12 = (x-2) \cdot (x^2 - 3x - 6)$$

LÍMITES PARA $X \rightarrow \infty$

$$\text{Ejemplo: } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x^2 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

Razonando en forma análoga, podemos deducir que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$$

- Ejemplos:
- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$
 - 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - 4x^3 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4) = +\infty$

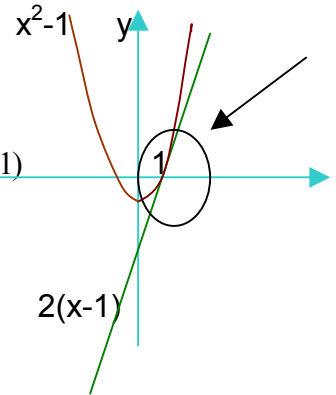
EQUIVALENTES:

DEF: $f(x) \approx g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

EJEMPLOS:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overset{\rightarrow 2}{(x+1)} \overset{1}{(x-1)}}{2(x-1)} = 1 \xrightarrow{\text{def.} \approx} x^2 - 1 \approx 2(x-1)$$

(Observar las gráficas en un entorno de centro 1)



$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{a_n x^n} = 1 \text{ (justificar)}$$

\Downarrow def. \approx

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{a_n x^n} \approx 1 \quad (a_n \neq 0)}$$

Puede demostrarse también que:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0} \approx \sqrt[n]{a_n x^n} \quad (\text{en condiciones de } \exists)}$$

Ejercicio: Demostrar que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \neq 0 \Rightarrow f(x) \approx \alpha$

SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES:

Demostraremos que en el cálculo de límites es posible sustituir en ciertas condiciones una expresión por una equivalente sin alterar el límite.

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES EN PRODUCTO:

$$\begin{array}{l} \textcircled{\text{H}} \quad f(x) \approx h(x) \\ \quad \quad x \rightarrow a \\ \quad \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) \\ \quad \quad \quad \quad x \rightarrow a \\ \quad \quad h(x) \neq 0 \quad \forall x \in E(a, \delta) \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{\text{T}} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x).g(x) \end{array}$$

Demostración :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{h(x)} \right) \cdot h(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x).g(x)$$

\downarrow $\rightarrow 1$ por H y def. \approx \downarrow teoremas de límite del producto.
 Divido y multiplico por $h(x) \neq 0$ en $E(a, \delta)$

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES EN COCIENTE:
(completar enunciado y demostración)

H $f(x) \approx h(x)$ T $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \dots\dots\dots$
 $\lim_{x \rightarrow a}$ $\lim_{x \rightarrow a}$
 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$
 $h(x) \neq 0 \forall x \in E(a, \delta)$

Demostración :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{\dots\dots\dots} \cdot \frac{h(x)}{g(x)} \right) = \dots\dots\dots$$

\downarrow \downarrow
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

SUSTITUCIÓN EN LA SUMA :

Puede probarse que es posible sustituir por equivalentes en el límite de una suma, salvo el caso de diferencia de equivalentes.

EJEMPLOS :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{\sim 3x^2}{(3x^2+3x-6)} \cdot \overset{\sim x}{(x+2)}}{\underset{\sim x^2}{(x^2+5)} \cdot \underset{\sim x^2}{(x^2-5x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 \cdot x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$

$\sim \sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \sqrt{x^2} = 2 \cdot |x| = 2x$ \nearrow $x > 0$ por ser $x \rightarrow +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

$\sim \sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \sqrt{x^2} = 2 \cdot |x| = -2x$ \nearrow $x < 0$ por ser $x \rightarrow -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\overset{\sim 2x}{2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

no puede sustituirse por equivalentes
 ↑ por ser diferencia de equivalentes.

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

$\sim -2x$ ↓ $\sim 2x$
 $A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B} \quad \sim 4x$

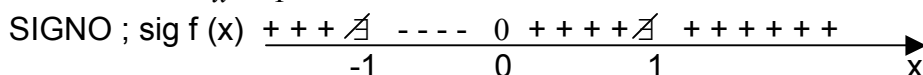
no puede sustituirse por equivalentes
 ↑ por ser diferencia de equivalentes.

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 5x} + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 - 5x - 9x^2}{\sqrt{9x^2 - 5x} - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{-6x} = \frac{5}{6}$$

$\sim -3x$ ↓ $\sim -3x$
 $A + B = \frac{A^2 - B^2}{A - B} \quad \sim .6x$

EAyRG DE UNA FUNCIÓN RACIONAL INCLUYENDO LÍMITES, EJEMPLO:

Sea $f : f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$



LÍMITES:

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \mp \infty$$

\xrightarrow{x}
 $\begin{matrix} \rightarrow 2 \\ \text{sig}(x^2 - 1) \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{sig}(x^2 - 1) \\ \xrightarrow{x} \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \cancel{(x-1)}}{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

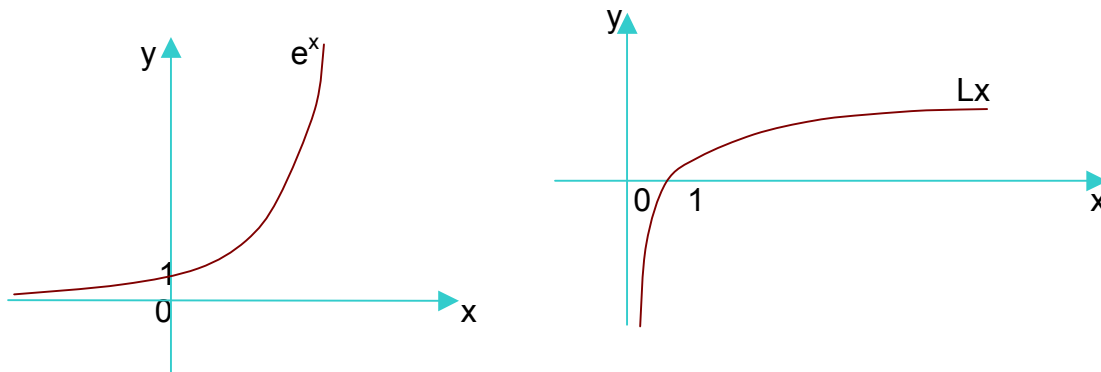
\xrightarrow{x}
 Queda a cargo del lector efectuar el bosquejo gráfico.
 teorema de sustitución en cociente.

EJERCICIOS: Estudio analítico y bosquejo gráfico de :

3) $f : f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 \cdot (x + 1)}$ 4) $f : f(x) = \frac{x^2 \cdot (x - 1)}{x^2 + 2x - 3}$ 5) $f : f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{2x - 4}$

6) $f : f(x) = x - 1 + \frac{x - 3}{2x - 3}$ 7) $f : f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{4x^2 - 1}}$ 8) $f : f(x) = \frac{|x^3 - x|}{x^2 + 2x - 3}$

LÍMITES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.



$x \rightarrow$	$e^x \rightarrow$	$u(x) \rightarrow$	$e^{u(x)} \rightarrow$	$x \rightarrow$	$Lx \rightarrow$	$u(x) \rightarrow$	$Lu(x) \rightarrow$
$-\infty$	0^+	$-\infty$	0^+	0^+	$-\infty$	0^+	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	e^a	$a \in \mathbb{R}$	e^a	$a \in \mathbb{R}^+$	La	$a \in \mathbb{R}^+$	La
0	1	0	1	1	0	1	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

El teorema de límite de la función compuesta nos permite generalizar.

DOS EQUIVALENTES IMPORTANTES:

$$e^{u(x)} - 1 \sim u(x) \quad \text{cuando } u(x) \rightarrow 0$$

$$Lu(x) \sim u(x) - 1 \quad \text{cuando } u(x) \rightarrow 1$$

Demostraremos la validez de alguno de los contenidos en las tablas anteriores:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

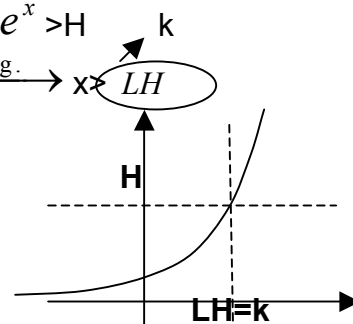
Lo anterior es cierto $\xleftrightarrow{\text{def. lim. } \infty} \forall H > 0 \exists k > 0 / \text{si } x > k \Rightarrow e^x > H$

Demostr.: $e^x > H \xleftrightarrow{\text{prop. f. log.}} Le^x > LH \xleftrightarrow{\text{def. log.}} x > LH$

Es decir que $\exists k > 0 / \text{si } x > k \Rightarrow e^x > H$

Siendo $k = LH > 0$, si $H > 1$, $k \in \mathbb{R}^+$ cualquiera si $0 < H \leq 1$

$\xrightarrow{\text{def. lim. } \infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$



2) si $a \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} Lx = La$

Lo anterior es cierto $\xleftarrow{\text{def. lim. finito}}$

$$\forall \epsilon (\alpha, \epsilon) \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E(a, \delta) \Rightarrow La - \epsilon < Lx < La + \epsilon$$

Demostración:

$$La - \epsilon < Lx < La + \epsilon \xleftarrow{\text{prop. f. exp.}}$$

$$e^{La-\epsilon} < e^{Lx} < e^{La+\epsilon} \leftrightarrow e^{La} \cdot e^{-\epsilon} < x < e^{La} \cdot e^{\epsilon} \leftrightarrow \boxed{a \cdot e^{-\epsilon} < x < a \cdot e^{\epsilon}}$$

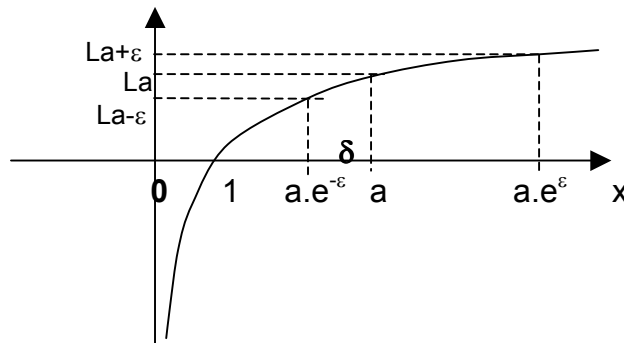
$$\epsilon > 0 \rightarrow -\epsilon < 0 \rightarrow 0 < e^{-\epsilon} < 1 \xrightarrow{a > 0} 0 < a \cdot e^{-\epsilon} < a$$

$$\epsilon > 0 \rightarrow e^{\epsilon} > 1 \xrightarrow{a > 0} a \cdot e^{\epsilon} > a$$



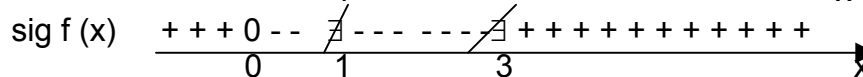
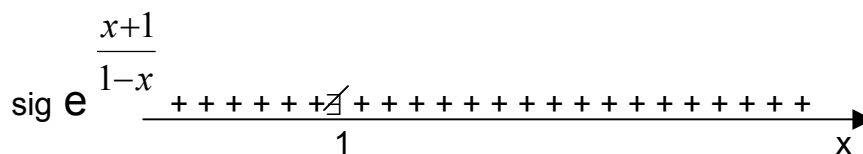
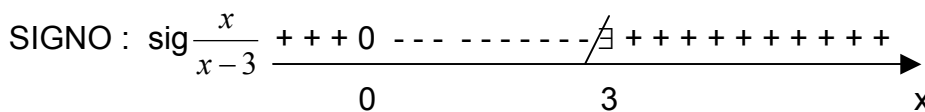
$$\Rightarrow \forall x \in E(a, \delta) \rightarrow La - \epsilon < Lx < La + \epsilon \xrightarrow{\text{def. límite}} \lim_{x \rightarrow a} Lx = La$$

$$\text{siendo } \delta = \min\{a \cdot e^{\epsilon} - a, a - a \cdot e^{-\epsilon}\}$$



EAYRG DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL INCLUYENDO LÍMITES, EJEMPLO:

$$f : f(x) = \frac{x}{x-3} e^{\frac{x+1}{1-x}} \quad D(f) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

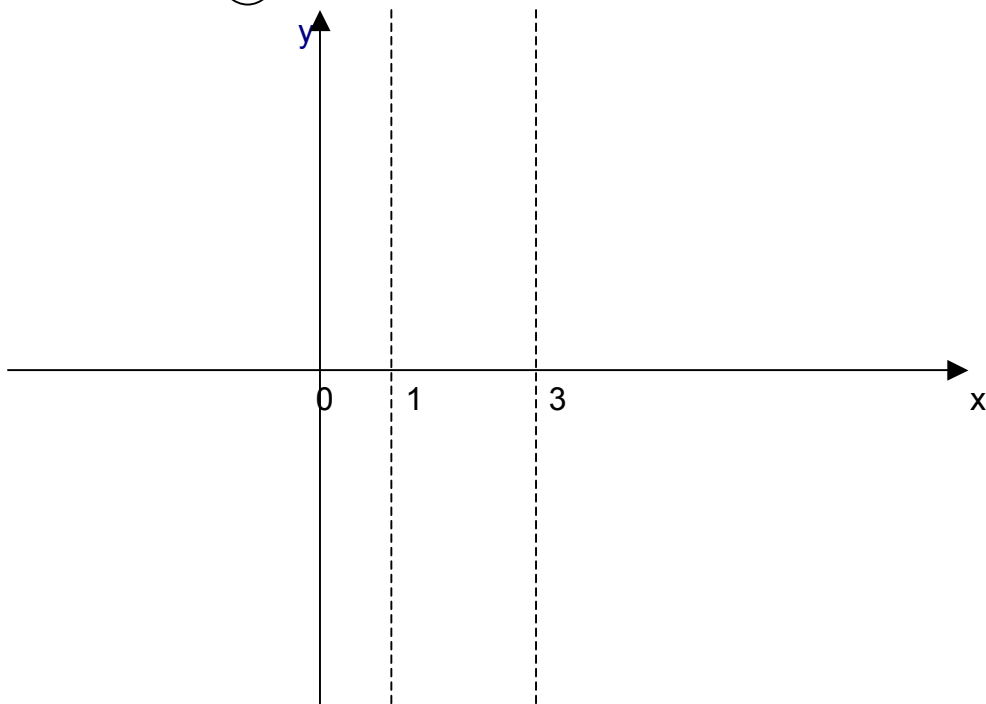


LÍMITES : $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} e^{\frac{x+1}{1-x}} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} e^{\frac{x+1}{1-x}} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-3} e^{\frac{x+1}{1-x}} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-3} e^{\frac{x+1}{1-x}} = 0$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-3} e^{\frac{x+1}{1-x}} = e^{-1} \cong 0,37$

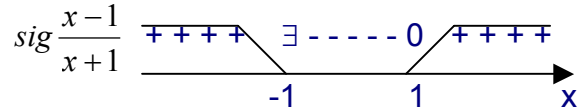
Queda a cargo del lector efectuar el bosquejo gráfico.



EAYRG DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA INCLUYENDO LÍMITES.
EJEMPLO:

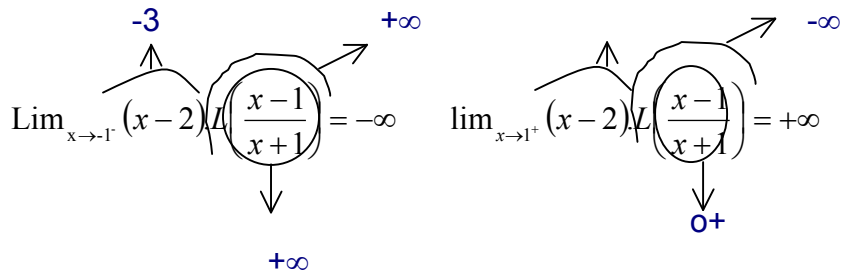
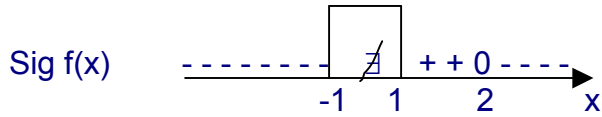
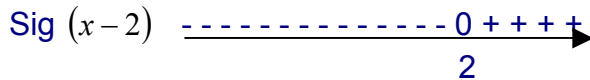
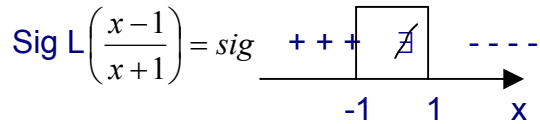
$$f : f(x) = (x - 2) \cdot L\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)$$

Dominio: $\frac{x - 1}{x + 1} > 0$



$$Df = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

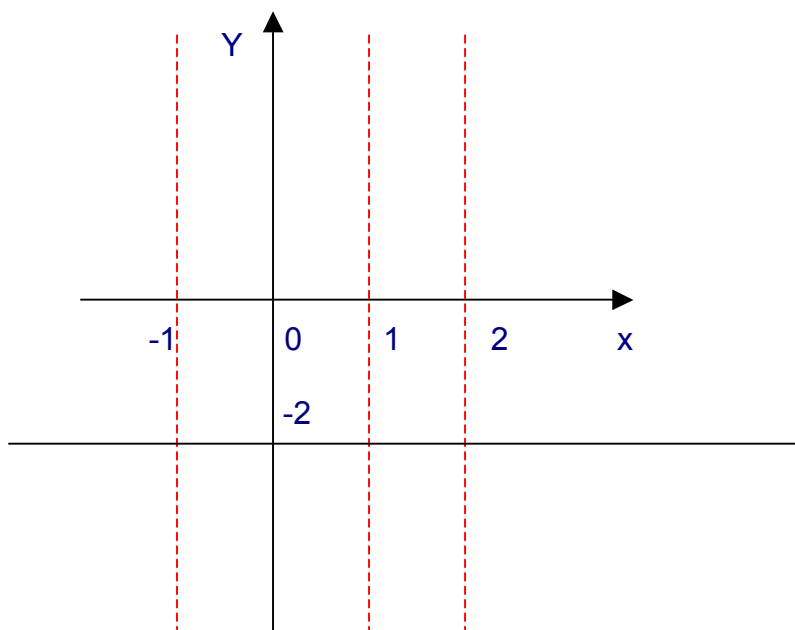
Signo $sigL\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = sig\left(\frac{x - 1}{x + 1} - 1\right) = sig\frac{x - 1 - x - 1}{x + 1} = sig\frac{-2}{x + 1}$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - 2) \cdot L\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cancel{x}^1 \left(\frac{-2}{\cancel{x}_1}\right) = -2$$

$\sim \frac{x - 1}{x + 1} - 1 = \frac{-2}{x + 1} \sim \frac{-2}{x}$

Bosquejo gráfico a cargo del lector.



EJERCICIOS: estudiar dominio, signo, límites y bosquejo gráfico de:

$$9) f : f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$$

$$12) f : f(x) = (x+3) \cdot L\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$10) f : f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$$

$$13) f : f(x) = \frac{x}{1-x^2} \cdot L\left|\frac{x+2}{x-3}\right|$$

$$11) f : f(x) = \sqrt{4x^2-1} \cdot e^{\frac{-3}{x-2}}$$

$$14) f : f(x) = \frac{|x-1|}{x} \cdot L\left|\frac{2x+2}{x-2}\right|$$

INFINITOS

Def: $f(x)$ es un infinito para $x \rightarrow a(\infty) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Ejemplos: x^2 es un infinito para $x \rightarrow \pm\infty$

e^x es un infinito para $x \rightarrow +\infty$

Lx es un infinito para $x \rightarrow +\infty$ y para $x \rightarrow 0^+$

$\frac{1}{x-1}$ es un infinito para $x \rightarrow 1$



15) Ejercicio: demostrar que:

$$L(x^2 + 3x) \sim Lx^2, \text{ pero } e^{x^2+x} \not\sim e^{x^2} \\ x \rightarrow +\infty$$

Orden de infinitos:

Veamos el comportamiento de los siguientes infinitos para $x \rightarrow +\infty$:

Lx, Lx^2, x^4, e^x, x^x . Complete la siguiente tabla:

X	Lx	Lx ²	x ⁴	e ^x	x ^x	Lx / x ⁴	e ^x / x ⁴	Lx ² / Lx
1								
5								
10								
100								



$+\infty \quad +\infty \quad +\infty \quad +\infty \quad +\infty \quad +\infty$

Apartir de estas ideas definiremos orden por comparación:

Definición: sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitos para $x \rightarrow a$. Diremos que:

1)- ORD $f(x) > \text{ORD}g(x) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

$x \rightarrow a$
 $x \rightarrow \infty$

2)- ORD $f(x) < \text{ORD}g(x) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$x \rightarrow a$
 $x \rightarrow \infty$

3)- ORD $f(x) = \text{ORD}g(x) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$

$x \rightarrow a$
 $x \rightarrow \infty$

en caso $\alpha=1$, decimos $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow a$ o $x \rightarrow \infty$)

3027030131402

Admitiremos, como se observa en la tabla anterior que:

TEOREMA DE ORDENES PARA $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{array}{cccc}
 ORD(L^h x) < ORD(x^k) < ORD(e^{\alpha \cdot x}) < ORD(x^{\beta \cdot x}) \\
 h > 0 & k > 0 & \alpha > 0 & \beta > 0 \\
 x \rightarrow +\infty & & &
 \end{array}$$

Estos infinitos se llaman respectivamente: logarítmico, potencial, exponencial, potencial-exponencial

APLICACIONES :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{e^{2x}} = 0$ por definición y teorema de órdenes.

$\xrightarrow{+} +\infty$ (potencial)
 $\xrightarrow{-} +\infty$ (exponencial)

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{L^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{L^2 x} = +\infty$ (por órdenes)

$\xrightarrow{+} +\infty$ (potencial)
 $\xrightarrow{+} +\infty$ (logarítmico)

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

$\xrightarrow{-} 0$
 $\xrightarrow{-} -\infty$

no es indeterminado!!

En este caso e^x no es un infinito. El teorema anterior solo es válido para $\rightarrow +\infty$.

CAMBIOS DE VARIABLE PARA APLICAR TEOREMA CON $x \rightarrow +\infty$

A efectos de poder aplicar el teorema de infinitos para $x \rightarrow \infty$, en algunas Indeterminaciones pueden hacerse cambios de variable adecuados.

Algunos de ellos pueden ser :

$$\text{si } x \rightarrow a^+, \text{ hacemos...: } z = \frac{1}{x-a} \rightarrow +\infty$$

$$\text{si } x \rightarrow a^-, \text{ hacemos...: } z = -\frac{1}{x-a} \rightarrow +\infty$$

$$\text{si } x \rightarrow -\infty, \text{ hacemos...: } z = -x \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) \cdot e^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) \cdot (x-2) \cdot e^{\frac{1}{x-2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 \cdot (x-2) \cdot e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{z \rightarrow +\infty} 4 \cdot \frac{1}{z} \cdot e^z = \lim_{z \rightarrow +\infty} 4 \cdot \frac{e^z}{z} = +\infty \\
 &\quad \downarrow z = \frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty \quad \text{(por órdenes)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+3}{x^2+x} \cdot e^{\frac{2}{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x \cdot (x+1)} e^{\frac{2}{x+1}} = \\
 \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{2}{x+1} e^{\frac{2}{x+1}} &= \lim_{z \rightarrow +\infty} z \cdot e^{-z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} z \cdot \frac{1}{e^z} = \\
 = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{e^z} &= 0 \quad \text{(por órdenes)} \quad z = \frac{-2}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + x - 12) \cdot L(x-3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+4) \cdot (x-3) \cdot L(x-3) = \\
 \lim_{z \rightarrow +\infty} 7 \cdot \frac{1}{z} \cdot L\left(\frac{1}{z}\right) &= \lim_{z \rightarrow +\infty} 7 \left(-\frac{Lz}{z} \right) = 0 \\
 &\quad \downarrow L1 - Lz = 0
 \end{aligned}$$

SUMA DE INFINITOS DE DISTINTO ORDEN : Demostraremos que suma de infinitos de distinto orden es equivalente al de mayor orden.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ y } g(x) \text{ infinitos para } x \rightarrow a(\infty) \\ \text{ord}[f(x)] < \text{ord}[g(x)] \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) + g(x) \sim g(x) \quad x \rightarrow a(\infty)$$

Demostración :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{g(x)} \right) = 1 \xrightarrow{\text{def. } \approx} f(x) + g(x) \approx g(x) \quad x \rightarrow a$$

↓ 0
↓ 1
↓ teo lím. Suma

Ejemplo : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) \overset{\sim e^x \text{ por teo anterior}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Ejercicio 16: Sean $u:u(x)=L(x-1)$ $v:v(x)=\frac{1}{x-1}$.

a) Investigar cual e estos dos infinitos para $x \rightarrow 1^+$ es de mayor orden.

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(L(x-1) + \frac{1}{x-1} \right)$



EJERCICIOS: Calcular los siguientes límites:

17) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-3x} - 1}{2x-6}$ 18) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{L(3x+4)}{x^2-1}$ 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x}{x-5} (e^{\frac{2}{x}} - 1)$

20) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{L(3x+5) - L(7x-3)}{-x^2+5x-6}$ 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{e^{2x}}$ 22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{Lx}$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(x^2-7x-1)}{4x-3}$ 24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-x}{Lx+x}$ 25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x}-x}{L|x|+x}$

26) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+2x}{x+5} e^{\frac{1}{x+2}}$ 27) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{x^2-9} e^{\frac{1}{x-3}}$ 28) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+3x-4) \cdot L(x-1)$

29) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$ 30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}}{x^2}$ 31) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} + L|x^2-2x|$



EJERCICIOS: estudiar dominio, signo, límites y bosquejo gráfico de:

$$32) f : f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^{\frac{1}{x+2}}$$

$$33) f : f(x) = \frac{3x-1}{x+2} e^{\frac{2}{x^2+5x+6}}$$

$$34) f : f(x) = \frac{x+2}{x-1} L(4x^2 - 1)$$

$$35) f : f(x) = \frac{x^2+x}{x-2} L \left| \frac{2x+2}{2x-6} \right|$$

$$36) f : f(x) = \frac{x+3}{L|x+2|}$$

$$37) f : f(x) = \frac{e^x - 2}{L|x| - 3}$$

$$38) f : f(x) = \frac{L|x+2| - 1}{|x+1| - 2}$$

$$39) f : f(x) = \frac{L^2|x|}{e^{2x} + e^x - 2}$$