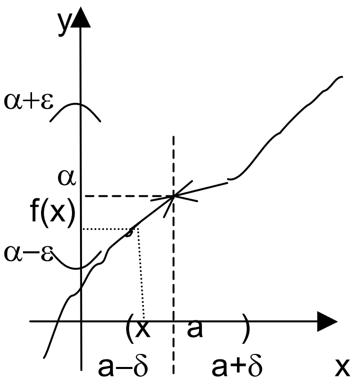
DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO:

$$\text{lím}_{x\to a} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \forall E(\alpha,\varepsilon)\ \exists E^*(a,\delta)/\forall x\in E^*(a,\delta)\Rightarrow\ f(x)\in E(\alpha,\varepsilon)$$



Es decir que ,dado un entorno cualquiera de centro "α", existe otro de centro "a" cuyas imágenes "caen" en el entorno de centro α.

El entorno de centro "a" es reducido con lo cual la existencia o no de f(a) es independiente de que el límite para x→a exista o no.

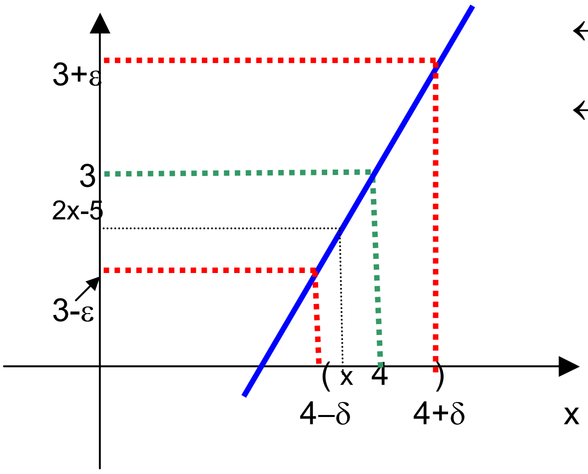
"δ", radio del entorno de centro "a", dependerá de "ε" y de la función f.

OBSERVACIÓN: $f(x)\in E(\alpha,\varepsilon)\Leftrightarrow \alpha-\varepsilon<f(x)<\alpha+\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

Ejemplo : Demostremos, aplicando la definición, que : $\text{lím}_{x\to 4}(2x-5)=3$

De acuerdo a la definición, esto será cierto $\Leftrightarrow$

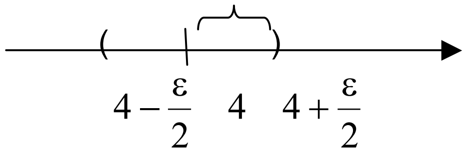
$$\forall E(3,\varepsilon)\ \exists E^*(4,\delta)/\forall x\in E^*(4,\delta)\Rightarrow\ 3-\varepsilon<2x-5<3+\varepsilon$$



$$\xleftrightarrow{\text{monot.,sumo5}} 8-\varepsilon<2x<8+\varepsilon$$

$$\xleftrightarrow{\text{monot.,}:2}\quad 4-\frac{\varepsilon}{2}<x<4+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta=\varepsilon/2$$



$$\Rightarrow \begin{array}{l}\exists E^*(4,\delta)/\forall x\in E^*(4,\delta)\Rightarrow\ 3-\varepsilon<2x-5<3+\varepsilon\\ \text{siendo } \delta=\varepsilon/2\end{array}$$

$\xrightarrow{\text{por.def.lím.finito}}$ $\text{lím}_{x\to 4}(2x-5)=3$ que es lo que queríamos demostrar.

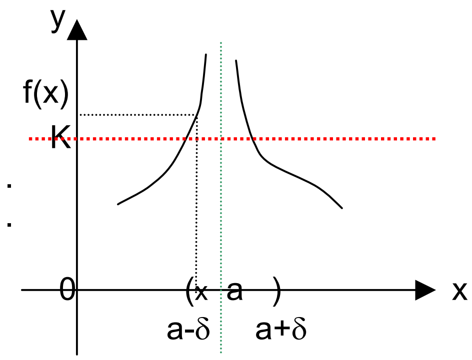
EJERCICIO 1 : Demostrar que : a) $\text{lím}_{x\to 3}(-x+5)=2$

b) $\text{lím}_{x\to a}(mx+p)=ma+p$

LIMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO:

DEFINICIONES:

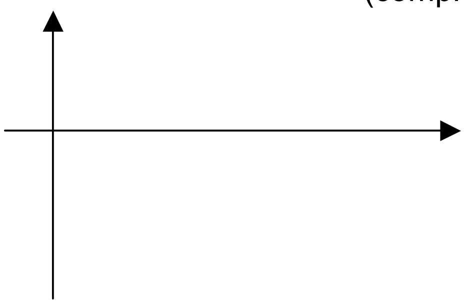
1) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K > 0 \;\; \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) > K$



Es decir, f(x) en este caso no está acotada superiormente en un $E^*(a,\delta)$, alcanza valores tan “grandes” como se quiera, tomando el δ adecuadamente. Dicho δ en este caso dependerá de K y de f.

2) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$ ....

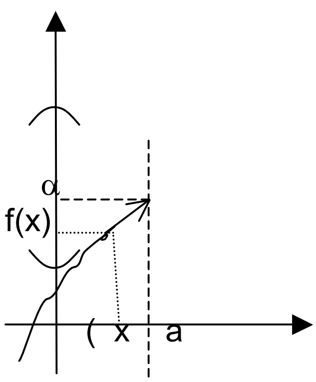
(completar definición y hacer una ilustración gráfica)



LÍMITES LATERALES:

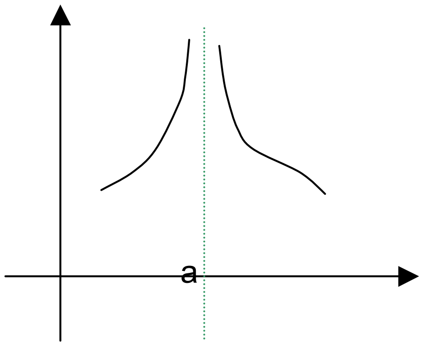
Cualquiera de las definiciones anteriores pueden restringirse a semientornos con lo cual tendríamos la definición de un límite lateral, por ejemplo:

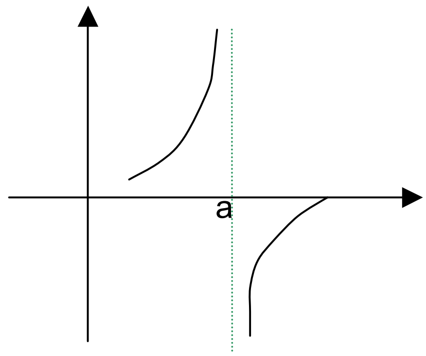
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall E(\alpha,\varepsilon) \;\; \exists E_-^*(a,\delta) / \forall x \in E_-^*(a,\delta) \Rightarrow \; f(x) \in E(\alpha,\varepsilon)$$



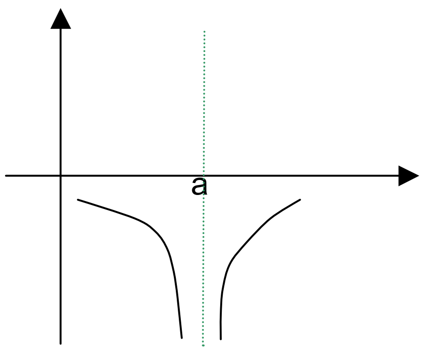
INFINITO “SIN SIGNO”

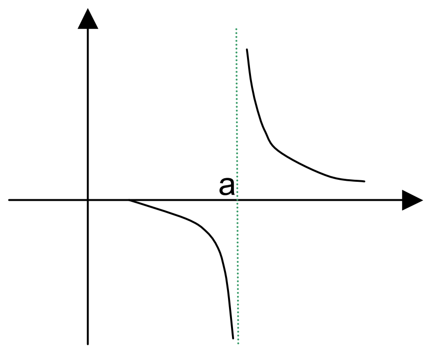
DEF: $lím_{x \to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K > 0 \; \exists E^{*}(a,\delta) / \forall x \in E^{*}(a,\delta) \Rightarrow |f(x)| > K$





En cualquiera de estos cuatro casos se está en condiciones de la definición.





CNyS DE EXISTENCIA DE LÍMITE FINITO

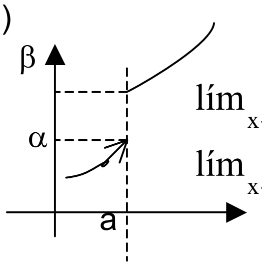
De las definiciones anteriores surge:

$$\text{lím}_{x \to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \quad \text{lím}_{x \to a^{\pm}} f(x) = \alpha$$

Esta condición y la definición de límite infinito nos permite analizar la existencia de un límite para x→a.

EXISTENCIA DE LÍMITES-EJEMPLOS:

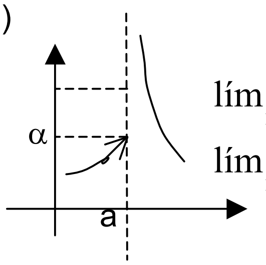
1)



En este caso :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a^-} f(x) = \alpha \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \beta \neq \alpha \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{def.lím.}\infty]{\text{CNyS } \exists \text{ lím.finito}} \nexists \lim_{x\to a} f(x)$$

2)



En este caso :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a^-} f(x) = \alpha \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{def.lím.}\infty]{\text{CNyS } \exists \text{ lím.finito}} \nexists \lim_{x\to a} f(x)$$

TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE FINITO

"Si una función tiene límite finito para $x\to a$, éste es único".

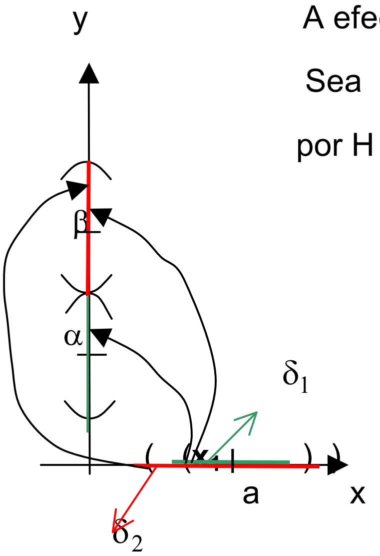
H $\exists \lim_{x\to a} f(x) = \alpha \in \Re$ T α es único $\lim_{x\to a} f(x)$

Demostración:

Supondremos por absurdo que, además de α,

HA) $\exists \beta \in \Re$ que también es $\lim_{x\to a} f(x)$

(hipótesis de absurdo)



A efectos de la demostración, supondremos que $\beta>\alpha$

Sea $\varepsilon = \dfrac{\alpha-\beta}{2} > 0$ un radio de entorno de centro α

por H y def. de lím :

$$\exists E^*(a,\delta_1) / \forall x \in \exists E^*(a,\delta_1) : \alpha - \frac{\beta-\alpha}{2} < f(x) < \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2}$$

y efectuando operaciones : $\dfrac{3\alpha-\beta}{2} < f(x) < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

por hipótesis de absurdo :

$$\exists E^*(a,\delta_2) / \forall x \in \exists E^*(a,\delta_2) : \beta - \frac{\beta-\alpha}{2} < f(x) < \beta + \frac{\beta-\alpha}{2}$$

y efectuando operaciones : $\dfrac{\alpha+\beta}{2} < f(x) < \dfrac{3\beta-\alpha}{2}$

por lo tanto si tomamos un $x_1 \in E^*(a,\delta_1) \cap E^*(a,\delta_2)$, deberá cumplirse:

$\frac{\alpha+\beta}{2} < f(x_1) < \frac{\alpha+\beta}{2}$ lo cual es absurdo.

Este partió de suponer la existencia de otro límite, ademas de α, (para $x \to a$)

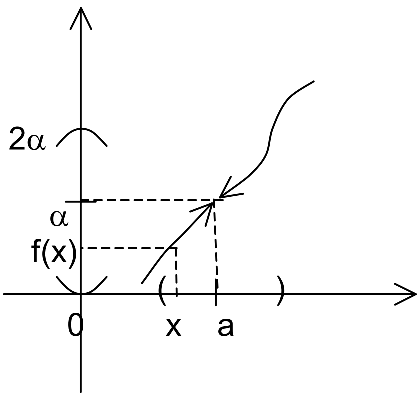
De manera que esto no es posible y α es el único límite para $x \to a$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE SIGNO.

"Si una función tiene límite finito positivo para x→a, existe un entorno reducido de centro a en el cual f(x) es también positiva"

si $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) > 0$

Demostración:



Dado $\varepsilon = \alpha > 0$, por hipótesis y def. de límite:

$$\exists E^*(a,\delta) / \forall x \in \exists E^*(a,\delta) : \alpha - \alpha < f(x) < \alpha + \alpha$$
$$\text{o sea} \quad 0 < f(x) < 2\alpha$$

Ejercicio 2 :

a) Enunciar y demostrar el teorema de conservación de signo para $\alpha<0$

b) Demostrar que si :

$\lim_{x\to a} f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) > 3$

OPERACIONES CON LÍMITES:

SUMA

f(x) ↓	g(x) ↓	f(x)+g(x) ↓
α	β	$\alpha+\beta$
$+\infty$	β	$+\infty$
$-\infty$	β	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?

PRODUCTO

f(x) ↓	g(x) ↓	f(x).g(x) ↓
α	β	$\alpha.\beta$
∞	$\beta\neq 0$	∞
∞	∞	∞
∞	0	?
acot	0	0

COCIENTE

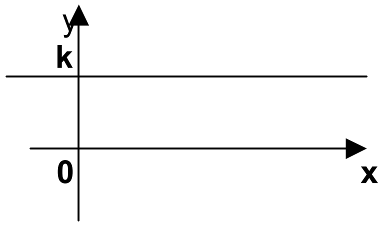
f(x) ↓	g(x) ↓	f(x)/g(x) ↓
α	$\beta\neq 0$	α/β
∞	β	∞
α	∞	0
$\alpha\neq 0$	0	∞
∞	∞	?
0	0	?

"INDETERMINACIONES" : "$+\infty-\infty$" "$\infty.0$" "∞/∞" "$0/0$"

LÍMITES DE FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

1) LÍMITES DE LA FUNCIÓN CONSTANTE:
Sea f : f (x) = k / k$\in$R. De acuerdo a las definiciones de límite :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}} k = k}$$



"el límite de una constante es la propia constante"

2) $\lim_{x\to a} x = a$ (consecuencia directa de la def. de límite finito)

3) $\lim_{\substack{x\to a\\ n\in N, n\geq 2}} x^n = \lim_{x\to a} \overbrace{x.x.x.....x}^{n} = \overbrace{a.a.a.....a}^{n} = a^n$

$\downarrow\downarrow\downarrow \quad \downarrow$

teo.lím producto

4) Consecuencia de lo anterior y de los teoremas de límite de la suma y el producto surge :

Si f es una función polinómica $\Rightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE LÍMITES :
(se aplicarán los teoremas de las tablas)

1) $\displaystyle lím_{x\to 2} \frac{\overbrace{(x^2+3x)}^{\to 10}.\overbrace{(x-1)}^{\to 1}}{\underbrace{x+3}_{\to 5}} = 2$ 2) $\displaystyle lím_{x\to -1} \frac{\overbrace{x+3}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0}} = \infty$

3) $\displaystyle \lim_{x\to -2^+} \frac{\overbrace{x+5}^{\to 3}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^-}} = -\infty$ Para determinar si x^2-4 tiende a 0^- o 0^+ le estudiamos su signo : sig(x^2-4) + + + + + 0 - - - - - -0 + + + + + ++

-2 ← 2 x

4) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{x^3-5x^2+12}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-4}_{x\to 0}} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}.\overbrace{(x^2-3x-6)}^{\to -8}}{\cancel{(x-2)}.\underbrace{(x+2)}_{\to 4}} = -2$

Este es el primer caso de indeterminación que nos encontramos.
Teniendo en cuenta que tanto numerador como denominador tienen raíz 2
Pueden factorizarse aplicando el teorema de Descartes : f(x)=(x-2).Q(x)
(siendo Q(x) el cociente de dividir f (x) entre x-2).

	1	-5	0	12
2		2	-6	-12
	1	-3	-6	0

$\Rightarrow$ $x^3-5x^2+12=(x-2).(x^2-3x-6)$

LÍMITES PARA X→ ∞

Ejemplo: $\displaystyle \lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2+x-1) = \lim_{x\to\infty} x^3.\overbrace{(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0})}^{\to 1} = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

∞ ∞ ∞

Razonando en forma análoga, podemos deducir que :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +\ldots+ a_0) = \lim_{x\to\infty} a_nx^n}$$

Ejemplos:

1) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}(-2x^3+4x-1) = \lim_{x\to+\infty}(-2\overbrace{x^3}^{\to+\infty}) = -\infty$

2) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}(3x^4-4x^3+2) = \lim_{x\to+\infty}(3x^4) = +\infty$

EQUIVALENTES:

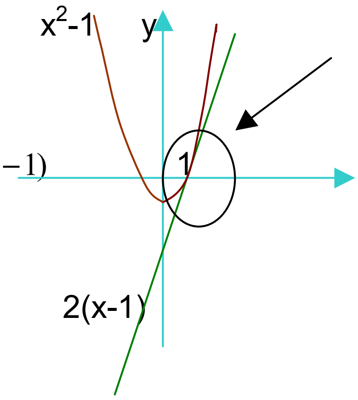
DEF: $f(x) \approx g(x) \underset{x\to a}{} \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a \\ \infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

$x\to a$ / ∞

EJEMPLOS:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\overset{\to 2}{(x+1)}\overset{1}{\cancel{(x-1)}}}{2\underset{1}{\cancel{(x-1)}}} = 1 \xrightarrow{def.\approx} x^2-1 \underset{x\to 1}{\approx} 2(x-1)$

(Observar las gráficas en un entorno de centro 1)



2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)}{a_nx^n} = 1$ (justificar)

$\Downarrow$ def.≈

$$\boxed{(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) \underset{x\to\infty}{\approx} a_nx^n \quad (a_n \neq 0)}$$

Puede demostrarse también que:

$$\boxed{\sqrt[n]{(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)} \underset{x\to\infty}{\approx} \sqrt{a_nx^n} \quad (a_n\neq 0) \quad \text{(en condiciones de } \exists)}$$

Ejercicio: Demostrar que si $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha \neq 0 \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{\approx} \alpha}$

SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES:

Demostraremos que en el cálculo de límites es posible sustituir en ciertas condiciones una expresión por una equivalente sin alterar el límite.

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES EN **PRODUCTO**:

H $f(x) \underset{x\to a}{\approx} h(x)$

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)$

$h(x)\neq 0 \ \forall x \in E(a,\delta)$

T $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x).g(x)$

Demostración :

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} \overset{\to 1 \text{ por H y def.}\approx}{\frac{f(x)}{h(x)}}.h(x).g(x) = \lim_{x\to a} h(x).g(x)$$

$\downarrow$ teoremas de límite del producto.

$\downarrow$ Divido y multiplico por $h(x)\neq 0$ en $E(a,\delta)$

TEOREMA DE SUSTITUCIÓN POR EQUIVALENTES EN **COCIENTE**:
(completar enunciado y demostración)

H $f(x) \approx h(x)$ ($x \to a$)
$\exists \lim_{x\to a} f(x)/g(x)$
$h(x) \neq 0 \ \forall x \in E(a,\delta)$

T $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Demostración :

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{\ldots\ldots}\right) \cdot \frac{h(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

→ ....-

↓ ....

....

SUSTITUCIÓN EN LA **SUMA** :

Puede probarse que **<u>es posible sustituir por equivalentes en el límite de una suma, salvo el caso de diferencia de equivalentes.</u>**

EJEMPLOS :

1) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{(3x^2+3x-6)}^{\sim 3x^2}.\overbrace{(x+2)}^{\sim x}}{\underbrace{(x^2+5)}_{\sim x^2}.\underbrace{(x^2-5x)}_{\sim x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2.x}{x^4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

x > 0 por ser $x \to +\infty$

$$\sim\sqrt{4x^2} = \sqrt{4}\sqrt{x^2} = 2.|x| = 2.x$$

2) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

x < 0 por ser $x \to -\infty$

$$\sim\sqrt{4x^2} = \sqrt{4}\sqrt{x^2} = 2.|x| = -2.x$$

3) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

4) $$\lim_{x\to +\infty} (\overbrace{\sqrt{4x^2+x}}^{\sim 2x} - x) = \lim_{x\to +\infty} (2x-x) = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

no puede sustituirse por equivalentes
$\sim 2x$ ↑ por ser **diferencia de equivalentes.**

$$5)\ \lim_{x \to +\infty} (\underbrace{\sqrt{4x^2+x}}_{\sim 2x} - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+x-4x^2}{\underbrace{\sqrt{4x^2+x}}_{\sim 2x}+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$A-B=\frac{A^2-B^2}{A+B} \qquad \sim 4x$$

no puede sustituirse por equivalentes
$\sim -3x$ ↑ por ser **diferencia de equivalentes.**

$$6)\ \lim_{x \to -\infty} (\underbrace{\sqrt{9x^2-5x}}_{\sim -3x} + 3x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{9x^2-5x-9x^2}{\underbrace{\sqrt{9x^2-5x}}_{\sim -3x}-3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5x}{-6x} = \frac{5}{6}$$

$$A+B=\frac{A^2-B^2}{A-B} \qquad \sim .6x$$

EAyRG DE UNA FUNCIÓN RACIONAL INCLUYENDO LÍMITES, EJEMPLO:

Sea f : f (x) $= \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$ D(f)=R - $\{\pm 1\}$

SIGNO ; sig f (x) + + + $\nexists$ - - - - 0 + + + + $\nexists$ + + + + + + +

-1 0 1 x

LÍMITES:

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{\overset{\to 2}{x^2-x}}{\underset{x \to 0^{\mp}}{x^2-1}} = \mp\infty$$

sig (x^2-1) + + + 0 - - - - - 0 + + +

-1 1 x

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\overset{\to 1}{x}.\cancel{(x-1)}}{\underset{\to 2}{(x+1)}.\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\overset{\sim x^2}{x^2-x}}{\underset{\sim x^2}{x^2-1}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Queda a cargo del lector efectuar el bosquejo gráfico.

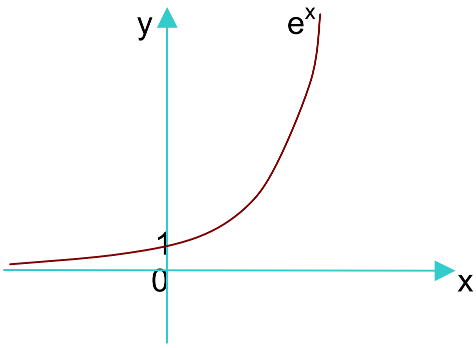
teorema de sustitución en cociente.

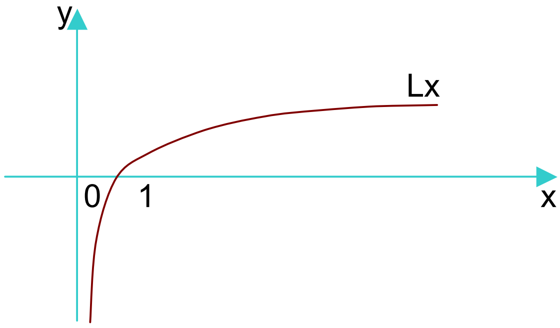
EJERCICIOS: Estudio analítico y bosquejo gráfico de :

3) f . f (x) $= \dfrac{x^2-x-2}{x^2.(x+1)}$ 4) f : f (x) $= \dfrac{x^2.(x-1)}{x^2+2x-3}$ 5) f : f (x) $= \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{2x-4}$

6) f : f (x) $= x-1+\dfrac{x-3}{2x-3}$ 7) f : f (x) $= \dfrac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ 8) f : f (x) $= \dfrac{|x^3-x|}{x^2+2x-3}$

LÍMITES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.





$x \to$	$e^x \to$	$u(x) \to$	$e^{u(x)} \to$	$x \to$	$Lx \to$	$u(x) \to$	$Lu(x) \to$
$-\infty$	0^+	$-\infty$	0^+	0^+	$-\infty$	0^+	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	e^a	$a \in \mathbb{R}$	e^a	$a \in \mathbb{R}^+$	La	$a \in \mathbb{R}^+$	La
0	1	0	1	1	0	1	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

El teorema de límite de la función compuesta nos permite generalizar.

DOS EQUIVALENTES IMPORTANTES:

$e^{u(x)}-1 \sim u(x)$ $\qquad$ $Lu(x) \sim u(x)-1$

$u(x) \to 0$ $\qquad$ **$u(x) \to 1$**

Demostraremos la validez de alguno de los contenidos en las tablas anteriores:

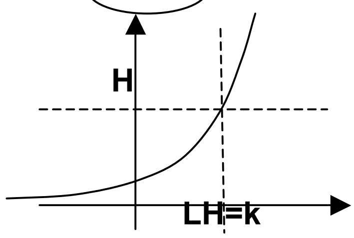
1) $lím_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Lo anterior es cierto $\xleftrightarrow{def.lím\infty}$ $\forall H>0 \exists k>0$ / si $x>k \Rightarrow e^x > H$ $\quad$ k

Demostr.: $e^x > H \xleftrightarrow{prop.f.log.} Le^x > LH \xleftrightarrow{def.log.} x > LH$

Es decir que $\exists k>0$ / si $x>k \Rightarrow e^x > H$

Siendo **k=LH** >0, si H>1, **$k \in \Re^+$** cualquiera si $0<H\leq 1$



$\xrightarrow{def.lím.\infty} lím_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2) **si** $a \in R^{+} \to lím_{x \to a} Lx = La$

Lo anterior es cierto $\xleftrightarrow{def.lím.finito}$

$\forall$E (α,ε) $\exists$E*(a,δ)/ $\forall x \in E(a,\delta) \Rightarrow La - \varepsilon < Lx < La + \varepsilon$

<u>Demostración:</u>

$La - \varepsilon < Lx < La + \varepsilon \xleftrightarrow{prop.f.\exp.}$

$$e^{La-\varepsilon} < e^{Lx} < e^{La+\varepsilon} \leftrightarrow e^{La}.e^{-\varepsilon} < x < e^{La}.e^{\varepsilon} \leftrightarrow \boxed{a.e^{-\varepsilon} < x < a.e^{\varepsilon}}$$

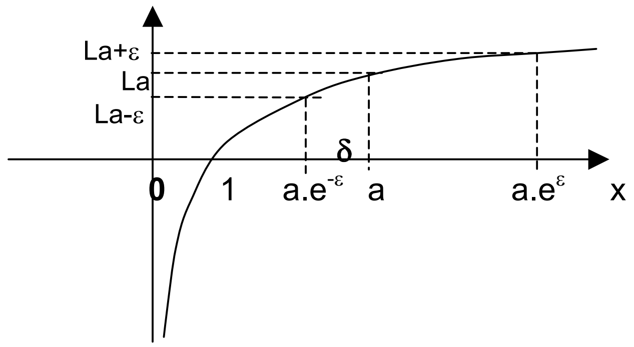
$\varepsilon > 0 \to -\varepsilon < 0 \to 0 < e^{-\varepsilon} < 1 \xrightarrow{a>0} 0 < a.e^{-\varepsilon} < a$

$\varepsilon > 0 \to e^{\varepsilon} > 1 \xrightarrow{a>0} a.e^{\varepsilon} > a$

$a.e^{-\varepsilon}$ a $a.e^{\varepsilon}$

$\Rightarrow \forall x \in E(a,\delta) \to La - \varepsilon < Lx < La + \varepsilon \xrightarrow{def.límite} lím_{x \to a} Lx = La$

siendo $\delta = mín\{ a.e^{\varepsilon} - a, a - a.e^{-\varepsilon} \}$



<u>EAyRG DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL INCLUYENDO LÍMITES, EJEMPLO:</u>

$$f : f(x) = \frac{x}{x-3} e^{\frac{x+1}{1-x}} \qquad D(f) = R - \{1,3\}$$

SIGNO : sig $\frac{x}{x-3}$ + + + 0 - - - - - - - - - - $\nexists$ + + + + + + + + + + +

0 3 x

sig $e^{\frac{x+1}{1-x}}$ + + + + + + $\nexists$ + + + + + + + + + + + + + + + + + +

1 x

sig f (x) + + + 0 - - $\nexists$ - - - - - - $\nexists$ + + + + + + + + + + + +

0 1 3 x

LÍMITES :

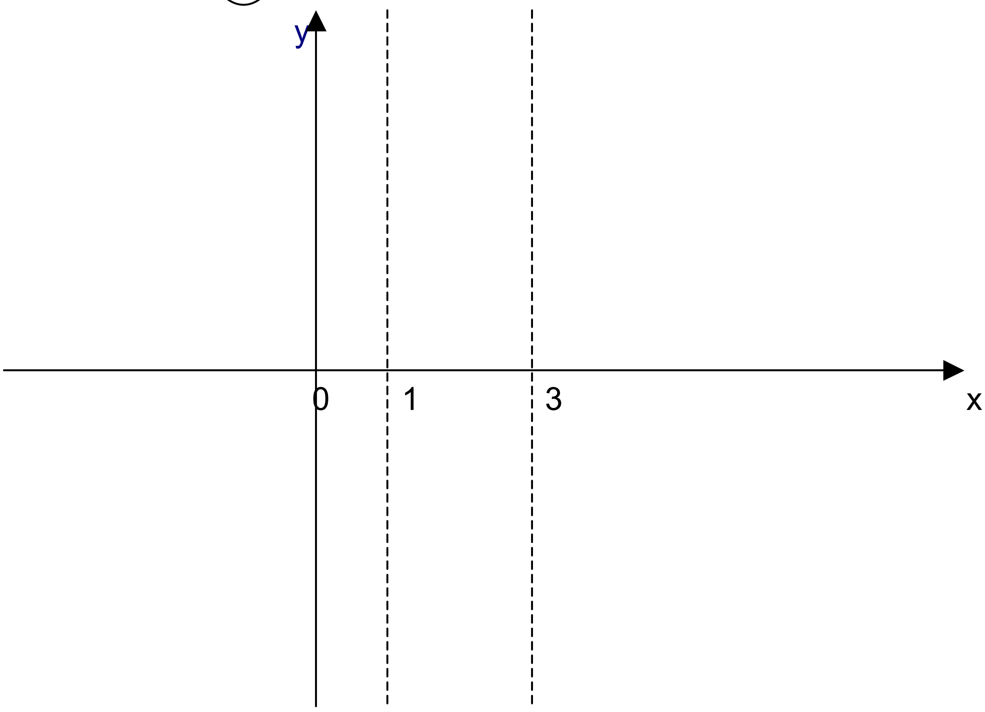
$$\lim_{x\to 3^-} \overbrace{\frac{\overset{3}{x}}{\underset{0^-}{x-3}}}^{-\infty} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{x+1}{1-x}}^{-2}}}_{e^{-2}>0} = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} \overbrace{\frac{\overset{3}{x}}{x-3}}^{+\infty} \underbrace{e^{\frac{x+1}{1-x}}}_{e^{-2}>0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \overbrace{\frac{\overset{1}{x}}{\underset{-2}{x-3}}}^{-1/2} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{\overset{2}{x+1}}{\underset{0^+}{1-x}}}^{+\infty}}}_{+\infty} = -\infty \qquad +\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \overbrace{\frac{x}{x-3}}^{-1/2} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{\overset{2}{x+1}}{\underset{0^-}{1-x}}}^{-\infty}}}_{0^+} = 0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \overbrace{\frac{x}{x-3}}^{1} e^{\overbrace{\frac{\overset{\sim x}{x+1}}{\underset{\sim -x}{1-x}}}^{-1}} = e^{-1} \cong 0{,}37$$

$\sim$ x

Queda a cargo del lector efectuar el bosquejo gráfico.



EAyRG DE UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA INCLUYENDO LÍMITES, EJEMPLO:

f : f (x) = $(x-2).L\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Dominio: $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$

$sig\,\dfrac{x-1}{x+1}$ + + + + ∃ - - - - - 0 + + + +

-1 1 x

Df=(-∞,-1)∪(1,+ ∞)

Signo $sigL\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = sig\left(\dfrac{x-1}{x+1}-1\right) = sig\,\dfrac{x-1-x-1}{x+1} = sig\,\dfrac{-2}{x+1}$

Sig L $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = sig$ + + + $\boxed{∄}$ - - - -

-1 1 x

Sig $(x-2)$ - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + +

2

Sig f(x) - - - - - - - - $\boxed{∄}$ + + 0 - - - -

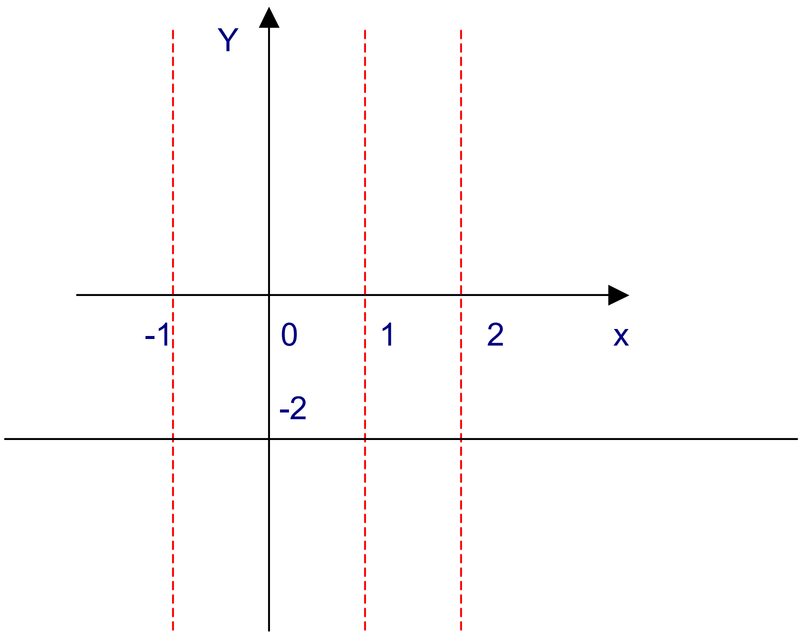
-1 1 2 x

$$\mathrm{Lim}_{x\to -1^-}\overset{-3}{(x-2)}.\overset{+\infty}{L\left(\underset{+\infty}{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}(x-2).\overset{-\infty}{L\left(\underset{0+}{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\overset{\pm\infty}{\underset{\sim x}{(x-2)}}.\overset{0}{L\left(\underset{1}{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\cancel{x}^{1}\left(\dfrac{-2}{\cancel{x}_{1}}\right) = -2$$

$$\sim \dfrac{x-1}{x+1}-1 = \dfrac{-2}{x+1} \sim \dfrac{-2}{x}$$

Bosquejo gráfico a cargo del lector.



EJERCICIOS: estudiar dominio, signo, límites y bosquejo gráfico de:

9) f : f (x) = $e^{\frac{x}{x-2}}$

10) f : f (x) = $\frac{x^2-1}{x-1}\, e^{\frac{1}{x}}$

11) f : f (x) = $\sqrt{4x^2-1}\,.e^{\frac{-3}{x-2}}$

12)- $f : f(x) = (x+3).L\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

13)- $f : f(x) = \frac{x}{1-x^2}.L\left|\frac{x+2}{x-3}\right|$

14)- $f : f(x) = \frac{|x-1|}{x}.L\left|\frac{2x+2}{x-2}\right|$

INFINITOS

Def: f(x) es un infinito para $x \to a(\infty) \Leftrightarrow \lim_{x\to a}$ f(x)=∞

Ejemplos: x^2 es un infinito para $x \to \pm\infty$

e^x es un infinito para $x \to +\infty$

Lx es un infinito para $x \to +\infty$ y para $x \to 0^+$

$\frac{1}{x-1}$ es un infinito para $x \to 1$

15)Ejercicio: demostrar que:

$$L(x^2+3x) \sim Lx^2 \text{, pero } e^{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{x^2}$$

Orden de infinitos:

Veamos el comportamiento de los siguientes infinitos para $x \to +\infty$:
Lx, Lx^2, x^4, e^x, x^x. Complete la siguiente tabla:

X	Lx	Lx^2	x^4	e^x	x^x	$\frac{Lx}{x^4}$	$\frac{e^x}{x^4}$	$\frac{Lx^2}{Lx}$
1								
5								
10								
100								

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$+\infty$ $+\infty$ $+\infty$ $+\infty$ $+\infty$ $+\infty$

Apartir de estas ideas definiremos **orden por comparación:**

Definición: sean f(x) y g(x) infinitos para $x \to a$ .Diremos que:
∞

1)- ORD f(x)>ORDg(x) $\leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x\to a \\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

$x \to a$

$x \to \infty$

2)-ORDf(x)<ORDg(x) $\leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x\to a \\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$x \to a$

$x \to \infty$

3)-ORDf(x)=ORDg(x) $\leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x\to a \\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$

$x \to a$

$x \to \infty$

en caso α=1, decimos $f(x) \sim g(x)$ (x→a o x→∞)

definición orden

Admitiremos, como se observa en la tabla anterior que:

TEOREMA DE ORDENES PARA $x \to +\infty$

$$ORD(L^h x) < ORD(x^k) < ORD(e^{\alpha . x}) < ORD(x^{\beta . x})$$

h>0 k>0 α>0 β>0

$x \to +\infty$

Estos infinitos se llaman respectivamente: logarítmico, potencial, exponencial, potencial-exponencial

APLICACIONES :

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to +\infty \text{ (potencial)}}{x^{10}}}{\underset{\to +\infty \text{ (exponencial)}}{e^{2x}}} = 0$$ por definición y teorema de órdenes.

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{L^2 x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to +\infty \text{ (potencial)}}{x^{\frac{1}{2}}}}{\underset{\to +\infty \text{ (logarítmico)}}{L^2 x}} = +\infty$$ (por órdenes)

3) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{e^x}}{\underset{\to -\infty}{x}} = 0$$ no es indeterminado!!

En este caso e^x no es un infinito. El teorema anterior solo es válido para $\to +\infty$.

CAMBIOS DE VARIABLE PARA APLICAR TEOREMA CON X→+∞

A efectos de poder aplicar el teorema de infinitos para x→ ∞, en algunas Indeterminaciones pueden hacerse cambios de variable adecuados.

Algunos de ellos pueden ser :

$$si.x \to a^{+}, hacemos..: z = \frac{1}{x-a} \to +\infty$$

$$si.x \to a^{-}, hacemos..: z = -\frac{1}{x-a} \to +\infty$$

$$si.x \to -\infty, hacemos..: z = -x \to +\infty$$

1) $$lím_{x\to 2^{+}} \overbrace{(x^2-4)}^{0}.\underbrace{e^{\frac{1}{x-2}}}_{+\infty} = lím_{x\to 2^{+}} \overbrace{(x+2)}^{4}.(x-2).e^{\frac{1}{x-2}} =$$

$$= lím_{x\to 2^{+}} 4.(x-2).e^{\frac{1}{x-2}} = lím_{z\to+\infty} 4.\frac{1}{z}.e^{z} = lím_{z\to+\infty} 4.\frac{e^{z}}{z} = +\infty$$

$z = \frac{1}{x-2} \to +\infty$

(por órdenes)

2) $$lím_{x\to -1^{-}} \overbrace{\frac{x+3}{x^2+x}}^{\infty}\,\overbrace{e^{\frac{2}{x+1}}}^{-\infty} = lím_{x\to -1^{-}} \frac{2}{x.(x+1)}e^{\frac{2}{x+1}} =$$

0

$$lím_{x\to -1^{-}} -\frac{2}{x+1}e^{\frac{2}{x+1}} = lím_{z\to+\infty} z.e^{-z} = lím_{z\to+\infty} z.\frac{1}{e^{z}} =$$

$$= lím_{z\to+\infty} \frac{z}{e^{z}} = 0$$ (por órdenes)

$z = \frac{-2}{x+1}$

$z = \frac{1}{x-3}$

3) $$lím_{x\to 3^{+}} (x^2+x-12).L(x-3) = lím_{x\to 3^{+}} \overbrace{(x+4)}^{7}.(x-3).L(x-3) =$$

$$lím_{z\to+\infty} 7.\frac{1}{z}.L\left(\frac{1}{z}\right) = lím_{z\to+\infty} 7\left(-\frac{Lz}{z}\right) = 0$$

L1-Lz
=0

0

SUMA DE INFINITOS DE DISTINTO ORDEN : Demostraremos que suma de infinitos de distinto orden es equivalente al de mayor orden.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ y } g(x) \text{ infinitos para } x\to a(\infty) \\ ord[f(x)]<ord[g(x)] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f(x)+g(x)\sim g(x) \\ x\to a(\infty) \end{array}$$

Demostración :

$$\text{lím}_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}=\text{lím}_{x\to a}\Big(\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{g(x)}{g(x)}\Big)=1 \xrightarrow{\text{def.}\approx} \begin{array}{c} f(x)+g(x)\approx g(x) \\ x\to a \end{array}$$

por H y def. ordenes

0 1 teo lím. Suma

$$\text{Ejemplo : } \text{lím}_{x\to+\infty}\overbrace{(e^x-x^2)}^{\sim e^x \text{ por teo anterior}}=\text{lím}_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

Ejercicio 16: Sean u:u(x)=L(x-1) v:v(x)= $\frac{1}{x-1}$.

a) Investigar cual e estos dos infinitos para $x\to1^+$ es de mayor orden.

b) Calcular $\text{lím}_{x\to1^+}\left(L(x-1)+\frac{1}{x-1}\right)$

EJERCICIOS: Calcular los siguientes límites:

17) $lím_{x\to3}\dfrac{e^{x^2-3x}-1}{2x-6}$ 18) $lím_{x\to-1}\dfrac{L(3x+4)}{x^2-1}$ 19) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x-5}(e^{\frac{2}{x}}-1)$

20) $lím_{x\to2}\dfrac{L(3x+5)-L(7x-3)}{-x^2+5x-6}$ 21) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{4x^5}{e^{2x}}$ 22) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{Lx}$

23) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{L(x^2-7x-1)}{4x-3}$ 24) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-x}{Lx+x}$ 25) $lím_{x\to-\infty}\dfrac{e^{3x}-x}{L|x|+x}$

26) $lím_{x\to-2^+}\dfrac{x^2+2x}{x+5}e^{\frac{1}{x+2}}$ 27) $lím_{x\to3^-}\dfrac{x-2}{x^2-9}e^{\frac{1}{x-3}}$ 28) $lím_{x\to1^+}(x^2+3x-4).L(x-1)$

29) $lím_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}$ 30) $lím_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ 31) $lím_{x\to2^-}\dfrac{x-3}{x-2}+L|x^2-2x|$

EJERCICIOS: estudiar dominio, signo, límites y bosquejo gráfico de:

32) f : f(x) = $(x^2 + 2x).e^{\frac{1}{x+2}}$

33) f : f (x) = $\dfrac{3x-1}{x+2}\,e^{\frac{2}{x^2+5x+6}}$

34) f : f (x)= $\dfrac{x+2}{x-1}\,L(4x^2-1)$

35) f : f (x) = $\dfrac{x^2+x}{x-2}\,L\left|\dfrac{2x+2}{2x-6}\right|$

36) f : f (x) = $\dfrac{x+3}{L|x+2|}$

37) f : f (x) = $\dfrac{e^x-2}{L|x|-3}$

38) f : f (x) = $\dfrac{L|x+2|-1}{|x+1|-2}$

39) f : f (x) = $\dfrac{L^2|x|}{e^{2x}+e^x-2}$