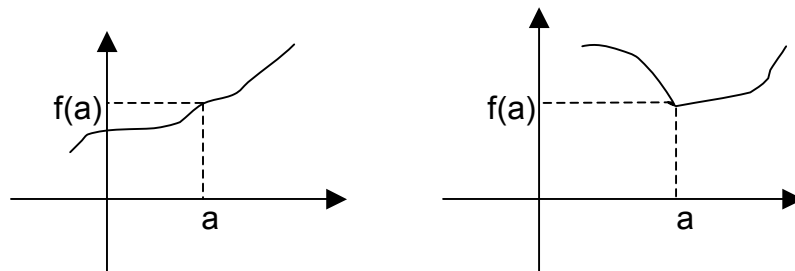
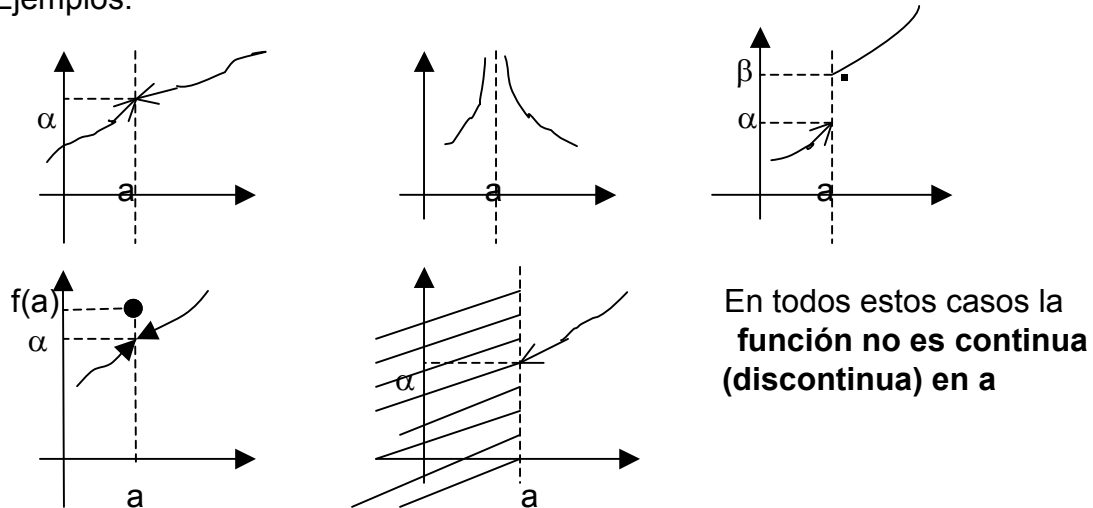


# CONTINUIDAD-CURSO 6TO-MATEMÁTICA

SÍNTESIS TEÓRICO-PRÁCTICA PROF. S Weinberger M.Valenzuela

**INTRODUCCIÓN:** La idea de una función “continua en a” es aquella en la cual  $\exists f(a)$  y no presenta “saltos” en a.

Ejemplos:



En estos últimos casos la función es continua en a.

## DEFINICIÓN:

**f es continua en a**  $\iff$  **1)  $\exists f(a)$**   
**2)  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = f(a)$**

Lo anterior puede expresarse de forma más breve:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Observación : La definición de continuidad requiere la existencia de  $f(a)$ , por lo tanto el conjunto de reales para los cuales f es continua “el conjunto de continuidad” está incluido en el dominio de f.  
 (  $\text{Cont}(f) \subset D(f)$  )

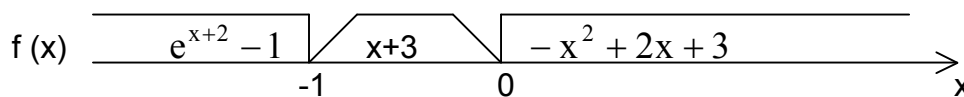
**EJEMPLOS:**

1) Si  $f$  es una función polinómica  $\longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \longrightarrow f$  cont. en  $a \forall a \in \mathbb{R}$

**por tanto una función polinómica es continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ , coincidiendo en este caso con el dominio.**

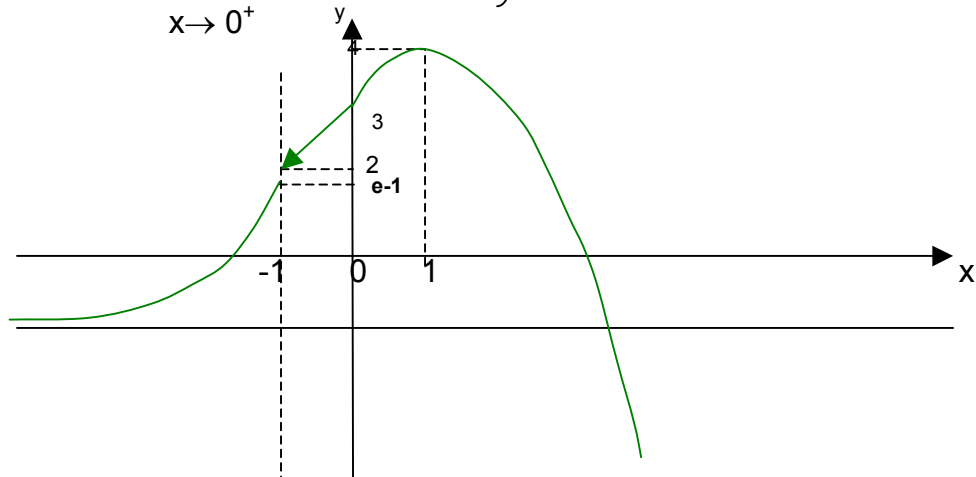
2) Sea  $f : f(x) = \sqrt{x}$   $D(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Estudiaremos la continuidad de  $f$  :  
 si  $a > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \xrightarrow{\text{por def. cont.}} f$  cont. en  $a$   
 si  $a = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 = f(0) \xrightarrow{\text{por def. cont.}} f$  cont. en  $0$   
 si  $a < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x}$  no existe  $\rightarrow f$  no es cont. en  $a$   
 $\Rightarrow f$  cont.  $\forall x \in \mathbb{R}^+$   
 En este caso el conjunto de continuidad ha perdido el 0 respecto al dominio.

3) Sea  $f : f(x) = \begin{cases} e^{x+2} - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x+3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  a) Estudiar cont. de  $f$  en  $-1$  y en  $0$ .  
 b) Graficar  $f$ .



cont. en  $-1$ :  $f(-1) = e^{-1+2} - 1 = e - 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} (e^{x+2} - 1) = e - 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+3) = 2$   
 $\xrightarrow{\text{por def. cont.}} f$  no cont. en  $-1$

cont. en  $0$ :  $f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+3) = 3$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2x + 3) = 3$   
 $\xrightarrow{\text{por def. cont.}} f$  cont. en  $0$



**EJERCICIO1:** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones :

a)  $f : f(x) = e^x$     b)  $f : f(x) = Lx$     c)  $f : f(x) = |x|$     d)  $f : f(x) = \text{sg}(x)$

Puede cambiarse la def. de  $\text{sg}(0)$  de modo que  $f$  sea cont. en 0 ?

**EJERCICIO2:**

Sea  $f : f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ |x| - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$     a) Estudiar cont. de  $f$  en  $-2, -1$  y en  $0$ .  
 b) Graficar  $f$ .

¿Podría hacerse  $f$  continua en  $-2$  si definiéramos  $f(-2)$ ?

**CONTINUIDAD LATERAL:**

**Def :**  $f$  es cont. en  $a^+$   $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

$f$  es cont. en  $a^-$   $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Observación: De acuerdo a esta definición :

$f$  es cont. en  $a \Leftrightarrow f$  es cont. en  $a^-$  y  $f$  es cont. en  $a^+$

**CONTINUIDAD EN INTERVALOS :**

Definiciones:

- 1)  $f$  es continua en  $(a,b) \Leftrightarrow f$  es continua  $\forall x \in (a,b)$
- 2)  $f$  es continua en  $[a,b] \Leftrightarrow f$  es continua  $\forall x \in (a,b)$ ,  
 $f$  es cont. en  $a^+$   
 y  $f$  es cont. en  $b^-$

**EJERCICIO3:** Considerando la función del ejercicio 2, analiza continuidades laterales de ésta en  $0$ . ¿es  $f$  continua en  $(-1,0)$ ? ¿en  $[-1,0]$ ? ¿y en  $[0,1/2]$ ? Justifique respuestas.

**OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS :**

**TEOREMAS DE CONTINUIDAD DE SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE :**

- 1) Si  $f$  es continua en  $a$  y  $g$  es cont. en  $a \Rightarrow f+g$  es cont. en  $a$
- 2) Si  $f$  es continua en  $a$  y  $g$  es cont. en  $a \Rightarrow f \cdot g$  es cont. en  $a$
- 3) Si  $f$  es continua en  $a$ ,  $g$  es cont. en  $a$  y  $g(a) \neq 0 \Rightarrow f/g$  es cont. en  $a$

Demostraremos 1) y los demás quedan a cargo del lector :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$                        $\swarrow$   
 def. función suma     $f(a)$      $g(a)$     por teo. lím. suma por H y def. cont.    def. función suma

- EJERCICIO4:** a) Demostrar 2)y3) (teos.cont.producto y cociente)  
 b) Sean :  $f:f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$        $g:g(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$   
 ¿es continua f+g en 0? ¿son continuas f y g en 0?  
 ¿vale el recíproco de los teoremas anteriores?  
 c) si h es una función /  $h^2$  es continua. ¿puede afirmarse que h es continua en a?

**EJEMPLO:** Estudiaremos la continuidad de la función:  $f:f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{(x-7).L(x-5)}$

- 1)  $\sqrt{x+3}$  es **continua**  $\forall x > -3$  (continuidad de la función radical)  
**(continuidad del numerador)**
- 2)  $x-7$  cont.  $\forall x \in \mathbb{R}$  (cont.func.polinómica)  
 $L(x-5)$  es cont.  $\forall x > 5$  (cont. func. logarítmica) }  $\xrightarrow{\text{cont.del producto}}$   $(x-7)L(x-5)$   
**cont.  $\forall x > 5$**   
**(continuidad del denominador)**
- 3)  $(x-7).L(x-5) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 7$  y  $x \neq 6$   
**(denominador no nulo)**

de 1),2)y3) y por teo.cont.cociente  $\rightarrow$  **f es continua  $\forall x > 5$ , con  $x \neq 6$  y  $x \neq 7$**

**EJERCICIO5:** Estudiar continuidad de la función  $f : f(x)=\frac{x^2 - 5x}{(e^{x+2} - 3)(L|x + 2|)}$

**CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN COMPUESTA:**

Si f es cont. en a }  
 g es cont. en f(a) }  $\Rightarrow$  (g o f) cont. en a

**Demostración:**  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = g[f(a)] = (g \circ f)(a) \Rightarrow$  gof cont. en a  
 (por cont.de g en f(a))  
 $\downarrow$   
 f(a) por cont. de f en a (H).

Ejemplo : Sea  $f : f(x) = L(x^2-1)$

$x^2-1$  cont.  $\forall x \in \mathbb{R}$  (cont.func.polinómica)  
 $u = x^2-1 > 0 \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$   
 $Lu$  es cont.  $\forall u > 0$  (cont. func. logarítmica)

cont. función compuesta

$f$  cont.  $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

**TEOREMAS DE CONTINUIDAD:**

**TEOREMA DE BOLZANO:**

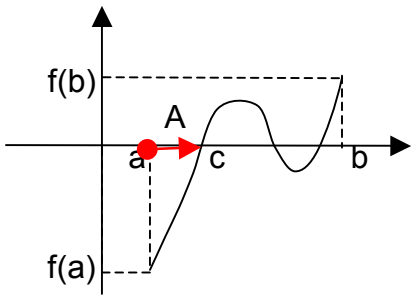
<span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">H</span> f cont. en [a,b] , f(a).f(b)<0	<span style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px 5px;">T</span> $\exists c \in (a,b) / f(c)=0$
--	--

Obs: El teorema **no asegura la unicidad de la raíz en (a,b)**

Demostración :

A efectos de la demostración supondremos  $f(a)<0$  y  $f(b)>0$

Consideramos un conjunto auxiliar :  $A = \{x \in [a,b] / f(x) < 0\}$



La demostración consiste en ver que dicho conjunto tiene extremo superior y que éste es raíz de f en (a,b).

- \*  $A \subset \mathbb{R}$  y  $A \neq \emptyset$  pues  $a \in A$  (def.A)
- \* A está acotado superiormente por b (def.A)

por axioma de continuidad.

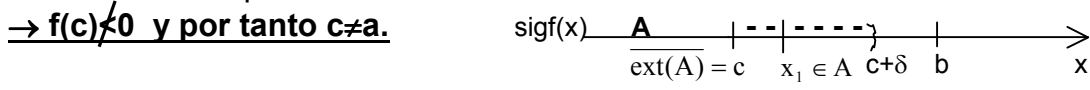
$\exists c = \overline{\text{ext}(A)}$  , al ser a y b cotas inf. y sup. respect.de A  $\rightarrow a \leq c \leq b$ . (más adelante veremos que  $c \neq a$  y  $c \neq b$ )

al ser f cont. en [a,b] por H

$\exists f(c) \in \mathbb{R}$  Probaremos que  $f(c)=0$ , suponiendo por absurdo  $f(c)<0$  o  $f(c)>0$

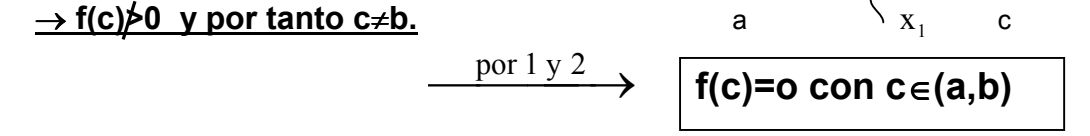
1) **Supongamos  $f(c)<0$ .** Si así fuera  $c \neq b$   $\xrightarrow{\text{por Hip.}}$  f es cont. en  $c^+$   
 $\xrightarrow{\text{def. cont.}}$   $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c) < 0$   $\xrightarrow{\text{teo. cons. signo}}$   $f(x) < 0 \forall x \in E_+(c, \delta)$

Tomando un  $x_1 \in E_+(c, \delta) \cap [a,b]$   $\xrightarrow{\text{def. A}}$  ABSURDO  
 $x_1 \in A$ , pero  $x_1 > c = \overline{\text{ext}(A)}$  lo cual es absurdo por def. de ext.



2) **Supongamos  $f(c)>0$ .** Si así fuera  $c \neq a$   $\xrightarrow{\text{por Hip.}}$  f es cont. en  $c^-$   
 $\xrightarrow{\text{def. cont.}}$   $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) > 0$   $\xrightarrow{\text{teo. cons. signo}}$   $f(x) > 0 \forall x \in E_-(c, \delta)$

$\xrightarrow{\text{prop. ext}}$   $\exists x_1 \in E_-(c, \delta) \cap A \rightarrow f(x_1) > 0$  por estar  $x_1$  en el semientorno  $f(x_1) < 0$  por estar  $x_1$  en A  $\rightarrow$  **ABS.**



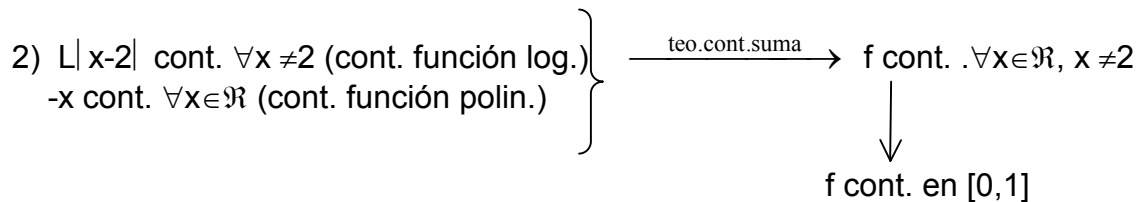
por 1 y 2  $\rightarrow$   **$f(c)=0$  con  $c \in (a,b)$**

**EJEMPLO:** Sea  $f : f(x) = L|x-2| - x$

Demostrar que  $f$  tiene al menos una raíz en  $(0,1)$

Aplicaremos el teorema de Bolzano:

1)  $f(0) = L > 0$  ,  $f(1) = -1 < 0$



$\xrightarrow{\text{de 1)y2) por teo. de Bolzano}} \exists c \in (0,1) / f(c) = 0$

**EJERCICIO6:**

Demostrar que  $f : f(x) = e^{x-3} + x^2 - 16$  tiene al menos una raíz en el intervalo  $(3,4)$

**EJERCICIO7:**

Sea  $f / f$  es cont. en  $[a,b]$ ,  $f(a) < a$ ,  $f(b) > b$ .  
 Demostrar que  $\exists c \in (a,b) / f(c) = c$   
 ( se sugiere considerar la función  $g/g(x) = f(x) - x$  )

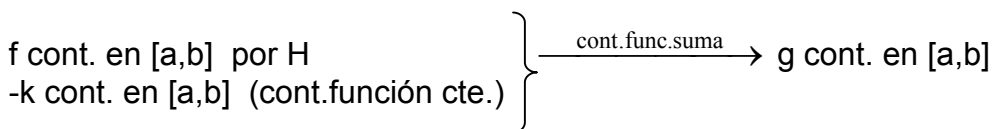
**TEOREMA DE DARBOUX** (aplicación de Bolzano)

**H**  $f$  cont. en  $[a,b]$   
 $f(a) < k < f(b)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

**T**  $\exists c \in (a,b) / f(c) = k$

Demostración:

Tomaremos una función auxiliar  $g : g(x) = f(x) - k$



$g(a) = f(a) - k < 0$  por H  
 $g(b) = f(b) - k > 0$  por H

$\xrightarrow{\text{por teo. de Bolzano}} \exists c \in (a,b) / g(c) = 0 \rightarrow f(c) - k = 0 \rightarrow f(c) = k$