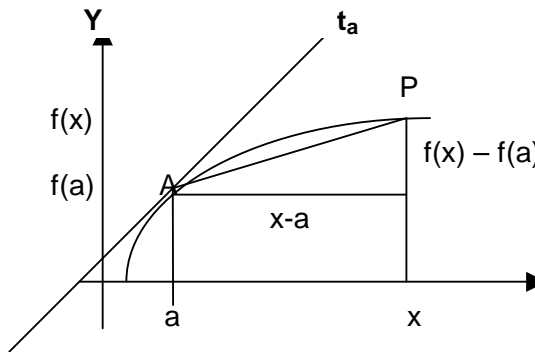


DERIVABILIDAD-CURSO 6TO-MATEMÁTICA

SÍNTESIS TEÓRICO-PRÁCTICA

PROF. SERGIO WEINBERGER, M.VALENZUELA



INTRODUCCIÓN.

Se considera una función f definida en un entorno de centro a , sea x perteneciente a dicho entorno.

A : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ le llamamos “cociente incremental” (“velocidad media”).

Observemos que dicho cociente es la pendiente de la recta r , que pasa por los puntos $A(a, f(a))$ y $P(x, f(x))$.

DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA DERIVADA.

Si hacemos tender x al número a ($x \rightarrow a$), en ese caso $P \rightarrow A$, y la recta AP tenderá a la recta t_a , tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

La pendiente de AP (cociente incremental o “velocidad media”) entonces, tenderá a la pendiente de t_a . A dicho límite en caso de existir y ser finito le llamaremos :

“**derivada de f en a** ” y la anotaremos : $f'(a)$, como vimos, ese número es **la pendiente de la recta t_a , tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$** . (también “velocidad instantánea en a ”). Es decir :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{si existe y es finito})$$

Resumiendo:

DEFINICIÓN: Siendo f una función definida en a , diremos que ésta es **derivable en a** si y sólo si existe **y es finito** el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

A dicho límite le llamamos **derivada de f en a** y lo anotamos : $f'(a)$.

Ecuación de la recta tangente

Teniendo en cuenta que la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_A, y_A) y tiene pendiente “ m ” es : $y - y_A = m \cdot (x - x_A)$ y la interpretación gráfica de la derivada, tenemos que:

la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es :

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Ejemplo : Sea $f : f(x) = x^2 - 2x + 3$. Calcularemos (si existen) e interpretaremos gráficamente : $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 3 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x-2)}{x} = -2 = f'(0)$$

Desde el punto de vista gráfico, esto implica que la tangente a la gráfica de f en el punto $(0, f(0)) \equiv (0, 3)$, tiene pendiente -2 .

Su ecuación es : $t_0) y - 3 = -2 \cdot (x - 0)$ o sea : $t_0) y = -2x + 3$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 = f'(1)$$

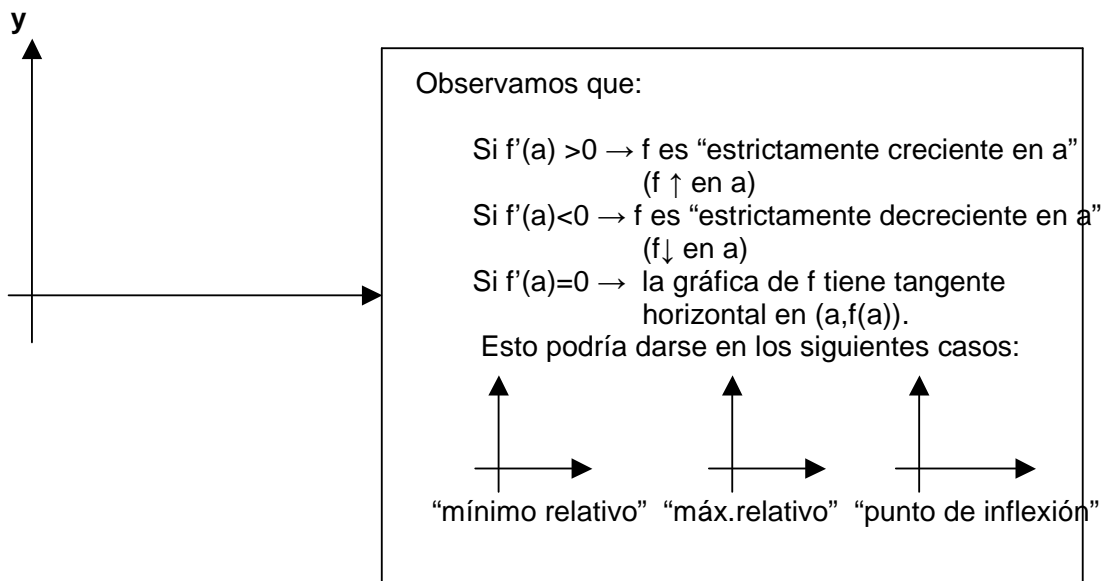
Por lo tanto, la recta tangente en el punto $(1, f(1)) \equiv (1, 2)$, tiene pendiente 0, o sea es horizontal.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 3 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot (x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 = f'(2)$$

La tangente en $(2, f(2)) \equiv (2, 3)$, tiene pendiente 2 .

Su ecuación es : $t_2) y - 3 = 2 \cdot (x - 2)$ o sea : $t_2) y = 2x - 1$

Grafiquemos f :



Estos conceptos y teoremas los veremos con más rigor.

FUNCIÓN DERIVADA :

Lo anterior podría hacernos pensar en la utilidad de conocer la derivada en cada punto, calcularemos entonces $f'(a)$, siendo a un valor cualquiera para el cual f es derivable. Lo haremos en el ejemplo que venimos trabajando :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x + 3 - (a^2 - 2a + 3)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - a^2 + 2a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a-2)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a-2) = 2a-2$$

Entonces $f'(a) = 2a-2$, siendo a un valor cualquiera de x , escribiremos : $f'(x) = 2x-2$ que es la relación de la **función derivada.**

Si estudiamos su signo, conoceremos el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función :

$$\text{sig } f'(x) \quad \underbrace{- - - - - 0 + + + + + + +}_{1}$$

De acuerdo a lo visto esto significa que la función decrece hasta el 1, en 1 tiene un mínimo relativo de tangente horizontal (¡el vértice de la parábola!), y luego crece.

Más adelante construiremos una tabla de funciones derivadas, evitando el cálculo de un límite para obtener la función derivada.

Ejemplo: Hallemos la función derivada de $f(x) = Lx$ con $x > 0$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Lx - La}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{L(x/a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x/a) - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{a(x - a)} = 1/a$$

$\rightarrow f'(x) = 1/x$ si $x > 0$

NOTACIÓN : Escribimos : $(Lx)' = 1/x$ si $x > 0$

EJERCICIO1 : i) Hallar $f'(x)$, aplicando la def. de derivada, siendo $f(x) = e^x$

ii) Sea $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$

- aplicando la def. de derivada, hallar $f'(x)$.
- Estudiar el signo de $f'(x)$ e interpretarlo gráficamente.
- Calcular $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ e interpretarlos gráficamente.

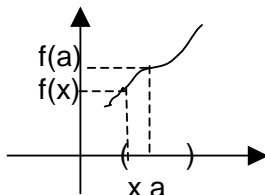
$$x \rightarrow \pm \infty$$

* Deducir el signo de $f(x)$, aproximando las raíces con error $< 0,1$

CRECIMIENTO, MÁXIMO Y MÍNIMO RELATIVO.

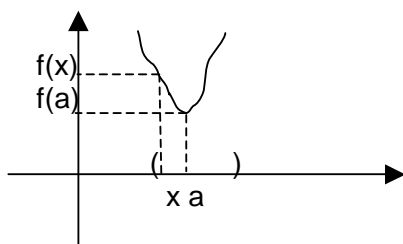
DEFINICIONES:

1) f es estrictamente creciente en $a \leftrightarrow \exists E(a, \delta) / \forall x \in E_{-}^{*}(a, \delta) \rightarrow f(x) < f(a)$
($f \uparrow$ en a)



$$\forall x \in E_{+}^{*}(a, \delta) \rightarrow f(x) > f(a)$$

2) f es estrictamente decreciente en $a \leftrightarrow \dots \dots \dots$
($f \downarrow$ en a) $\dots \dots \dots$
(completar definición y hacer figura)



3) f tiene un mínimo relativo en $a \leftrightarrow \exists E(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \rightarrow f(x) > f(a)$

4) f tiene un máximo relativo en $a \leftrightarrow \dots\dots\dots$

TEOREMA : si $f'(a) > 0 \rightarrow f \uparrow$ en a

Demostración: por hipótesis y definición de derivada: $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0$

$\xrightarrow{\text{por.teo.cons.signo}} \exists E(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$

sea $x \in E^*(a, \delta)$, por lo anterior : $\left. \begin{array}{l} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \\ x - a < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{regla.designo}} f(x) - f(a) < 0$
 \downarrow
 $f(x) < f(a)$

si $x \in E^*(a, \delta) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \\ x - a > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{regla.designo}} f(x) - f(a) > 0$
 \downarrow
 $f(x) > f(a)$

$\xrightarrow{\text{por.def}} f \uparrow$ en a

EJERCICIO2 : Verdadero o Falso? (si V : demostrar, si F: contraejemplo)

- 1) si $f'(a) < 0 \rightarrow f \downarrow$ en a
- 2) si $f \uparrow$ en $a \rightarrow f'(a) > 0$
- 3) si f tiene un mínimo relativo en $a \rightarrow f'(a) = 0$
- 4) si f tiene un mínimo relativo en a y $\exists f'(a) \rightarrow f'(a) = 0$
- 5) si $f'(a) = 0 \rightarrow f$ tiene un máximo o un mínimo relativo en a .

RELACIÓN CONTINUIDAD – DERIVABILIDAD/ PUNTOS SINGULARES

Teorema : si f es derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a

$$\text{Dem : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} (x-a) + f(a) \right] \stackrel{\text{teos.lím.}}{=} f(a)$$

Por def
por H y def.deriv.
 \downarrow
 \downarrow

$$\rightarrow f \text{ continua en } a \qquad \qquad \qquad f'(a) \qquad 0$$

suma y prod.

Teorema contrarrecíproco : **si f no es continua en $a \rightarrow f$ no es derivable en a**
(equivalente al anterior)

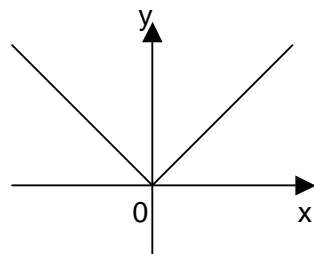
Observación importante : El recíproco del teorema demostrado es falso :

Si f es continua $\rightarrow f$ es derivable es FALSO.

Veremos dos contraejemplos que demuestran esto :

1) Sea $f : f(x) = |x|$ def.cont.
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0) \rightarrow f$ es cont. en 0

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \uparrow < 0 \\ \text{def.deriv.} \\ \rightarrow f \text{ no deriv. en } 0 \end{array}$$



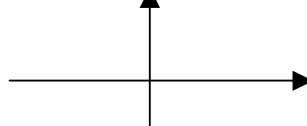
Los límites anteriores son las pendientes de las semitangentes en $(0, f(0))$

2) Sea $f: f(x) = \sqrt[3]{x}$ def.cont.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0) \rightarrow f \text{ cont. en } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$$

$\rightarrow f$ no es derivable en 0.



Observación : la interpretación gráfica de que el límite del cociente incremental es :
tangente vertical en $(a, f(a))$.

ESTUDIO DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD EN UN PUNTO :

De acuerdo a lo visto, podemos empezar estudiando la continuidad en a

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ o no existe} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{def. cont.}} f \text{ continua en a} \\ \xrightarrow{\text{def. cont.}} f \text{ no cont. en a} \end{array}$$

$$\text{no cont. en a} \xrightarrow{\text{contrarr.teo.cont-deriv}} f \text{ no derivable en a}$$

Si f

cont. en a \rightarrow debo estudiar derivabilidad.

Para estudiar derivabilidad en a, aplico la def., por tanto debo calcular: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

En la práctica, en oportunidades el cálculo de ese límite supone calcular

Ambos límites laterales : $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, si ambos son iguales a un mismo **número**

la función es derivable, siendo ese número $f'(a)$.

En caso de ser f cont. en a (si no es cont., ya no es derivable), los límites anteriores son iguales a los siguientes : $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f'(x)$, los cuales en oportunidades son más

fáciles de calcular.

EJEMPLO: Sea $f(x) = \begin{cases} Lx & \text{si } x > 1 \\ 2x-2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Estudiaremos continuidad y derivabilidad de f en 0 y en 1.

$$\text{en 1 : } \left. \begin{array}{l} f(1) = 2(1)-2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x-2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} Lx = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{def. cont.}} f \text{ es continua en a}$$

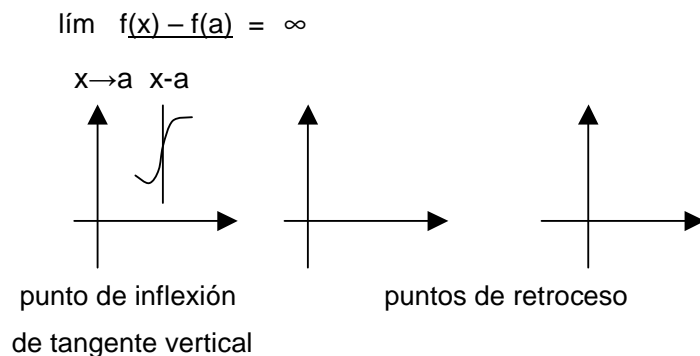
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-2-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{Lx-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{def. deriv.}} f \text{ no derivable en a}$$

Observación : Teniendo en cuenta que : $(Lx)' = 1/x$ (deducción hecha en ejemplo), y que $(2x-2)' = 2$ (deducción a cargo del lector), como se dijo anteriormente estos últimos límites, en virtud de que f es continua en a, pueden calcularse haciendo los límites laterales de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 & \text{Entonces vemos que estos límites dieron los mismos} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 1/x = 1 & \text{resultados calculados por este otro método que en este} \\ & \text{caso nos evitó las indeterminaciones.} \end{array}$$

Estos límites nos dan las pendientes de las semitangentes en 1^\pm

2) **Puntos de tangente vertical** : Son aquellos en los que :



OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES:

DERIVADA DE UNA SUMA:

TEOREMA : Si f es derivable en a } $\Rightarrow (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
 g es derivable en a }

Demostración :

$$\begin{aligned} (f+g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \quad \text{(por teo.de l'ím suma)} = f'(a) + g'(a) \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad f'(a) \qquad \qquad g'(a) \\ &\quad \text{(por Hip.y def. de derivabilidad)} \quad \text{(por hip.y def de derivabilidad)} \end{aligned}$$

Observación : este teorema asegura que suma de funciones derivables en a , es una función también derivable en a .

DERIVADA DEL PRODUCTO:

TEOREMA : Si f es derivable en a
 g es derivable en a } $\Rightarrow (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

Demostración:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - (f(a) \cdot g(a))}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] = \\ &\quad \begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & f'(a) & g'(a) \\ & \text{(por Hip. y def. de} & \text{(por hip. y def de} \\ & \text{derivabilidad)} & \text{derivabilidad)} \end{array} \\ &\quad \begin{array}{c} \downarrow \\ g(a) \\ \text{(por hip. g es deriv. en a} \xrightarrow{\text{teo. cont-deriv.}} \text{g cont en a)} \end{array} \\ &\text{(teos. lím. suma y producto)} \\ &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \end{aligned}$$

EJERCICIO3: Demostrar, aplicando la definición de derivada :

a) Si f es derivable en a
 g es derivable en a
 g(a) ≠ 0 } $\Rightarrow (f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$

b) Si f es derivable en a, k ∈ R $\Rightarrow (k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)$

TABLA DE FUNCIONES DERIVADA:

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
$k \in \mathbb{R}$	0	$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$
$k \cdot x^n$	$k \cdot n \cdot x^{n-1}$	$\sqrt[3]{u(x)}$	$\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(u(x))^2}} u'(x)$
$k \cdot [u(x)]^n$	$k \cdot n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$	e^x	e^x
$ x $	$\text{sig}(x)$	$e^{u(x)}$	$e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$ u(x) $	$\text{sig}(u(x)) \cdot u'(x)$	Lx	$1/x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$Lu(x)$	$\frac{1}{u(x)} u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$	$L x $	$1/x$
		$L u(x) $	$\frac{1}{u(x)} u'(x)$
$\text{sen}(x)$	$\text{cos}(x)$	$\text{sen } u(x)$	$\text{cos } u(x) \cdot u'(x)$
$\text{cos}(x)$	$-\text{sen}(x)$	$\text{tan}(x)$	$\frac{1}{\text{cos}^2 x}$

OPERACIONES:

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$	$u(x)/v(x)$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$k/v(x)$	$\frac{-k \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
$k \cdot v(x)$	$k \cdot v'(x)$	$L \frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{u(x) \cdot v(x)}$
$u(x) \cdot e^{v(x)}$	$[u'(x) + u(x) \cdot v'(x)] \cdot e^{v(x)}$	$L \left \frac{u(x)}{v(x)} \right $	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{u(x) \cdot v(x)}$

CONCAVIDAD-DERIVADA SEGUNDA.

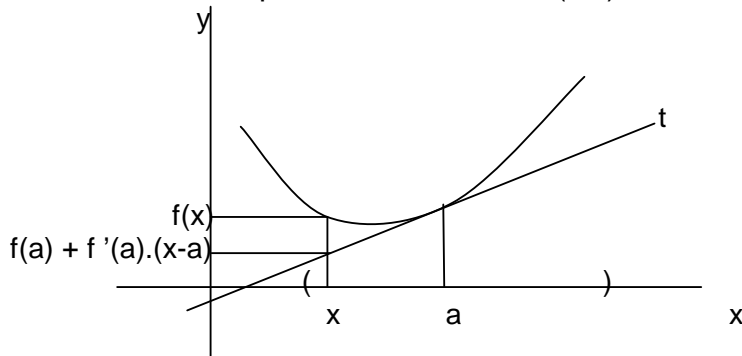
Sea f una función derivable en "a". Recordamos que en este caso, la ecuación de la recta t , tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es:

$$t) \quad y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

Diremos que f tiene concavidad positiva o negativa en "a", según si en un entorno de a , la imagen $f(x)$ de un x cualquiera del entorno es mayor o menor que la imagen de dicho x en la recta tangente t .

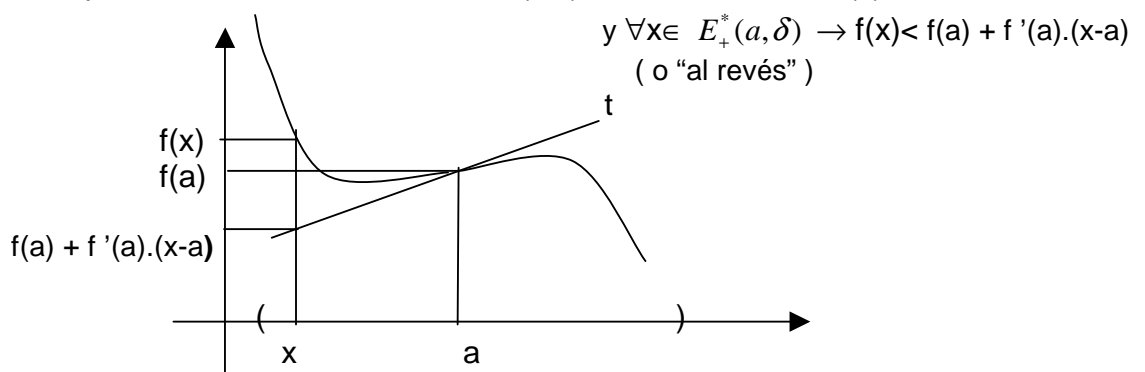
CONCAVIDAD-DEFINICIONES: Siendo f una función derivable en "a", diremos que :

- 1) f tiene concavidad positiva en $a \Leftrightarrow \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \rightarrow f(x) > f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$



- 2) f tiene concavidad negativa en $a \Leftrightarrow \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \rightarrow f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$

- 3) f tiene punto de inflexión en $a \Leftrightarrow \exists E^*(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \rightarrow f(x) > f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$



DERIVADA SEGUNDA : Llamaremos función derivada segunda de f a aquella /

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

TEOREMAS DE RELACIÓN CONCAVIDAD-DERIVADA SEGUNDA:

1) si $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene concavidad positiva en a .

2) si $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene concavidad negativa en a .

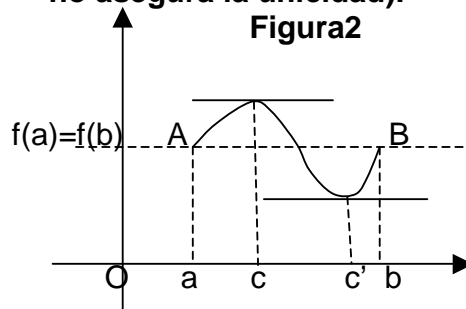
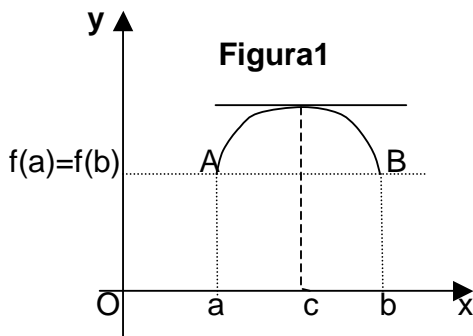
3) Si $\text{sig } f''(x) \xrightarrow{\text{a}} \left(\begin{array}{c} \text{++++} \\ \text{----} \end{array} \right) \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en a
(f'' cambia de signo en a)
 f' continua en a

Esto nos permite **con el signo de la derivada segunda, determinar concavidad y puntos de inflexión de f .**

TEOREMA DE ROLLE:

H f continua en $[a,b]$
 f derivable en (a,b)
 $f(a)=f(b)$

T $\exists c \in (a,b) / f'(c)=0$
 (existe en el intervalo un punto de tangente horizontal ; el teorema no asegura la unicidad).



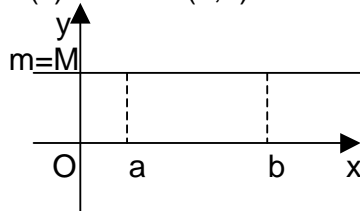
Siendo $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$, existirá al menos un punto en el cual la tangente sea $\parallel AB$ (en este caso horizontal)

Demostración:

Por H f cont. en $[a,b] \xrightarrow{\text{teo. W2}} \exists$ máximo y mínimo absolutos (M y m) de f en $[a,b]$, $m \leq M$

1) si $m=M$, como además $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a,b] \Rightarrow m=f(x)=M \forall x \in [a,b]$ es decir que en este caso f es constante en $[a,b]$, entonces:

$$f'(x) = 0 \forall x \in (a,b)$$



2) si $m < M$ consideremos a x_1 y $x_2 \in [a,b] / f(x_1)=m$ y $f(x_2)=M$
 como $m=f(x_1) < f(x_2)=M$

por H : $f(a)=f(b)$ } $\Rightarrow x_1$ y x_2 no pueden coincidir ambos con a o b (sería $m=M$), de modo que uno de los dos $\in (a,b)$

Supongamos que sea $x_2 \in (a,b)$ (como en la figura 1)

Existirá entonces un $E(x_2, \delta) \subset [a,b]$ } $\Rightarrow f(x) \leq f(x_2) \forall x \in [a,b]$
 Además $f(x_2)=M$ es máximo absoluto de f en $[a,b]$

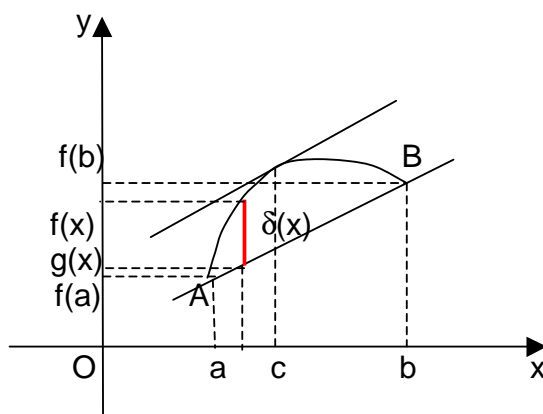
$\xrightarrow{\text{def. máx. relativo}} f$ presenta un máx. relativo en x_2 } $\xrightarrow{\text{teo. anterior}} f'(x_2)=0$
 $x_2 \in (a,b) \xrightarrow{\text{por. H}} f$ deriv. en x_2 } con $x_2 \in (a,b)$

EJERCICIO: Sea $f : f(x) = L(-x^2 + ex + 1)$

- a) Investigar si $\exists c \in (1, e-1)$ tal que la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ presente tangente horizontal. Fundamentar.
- b) Hallar c de la parte a) y graficar f en el intervalo $[1, e-1]$

TEOREMA DE LAGRANGE:

- H** f continua en $[a,b]$
 f derivable en (a,b)
- T** $\exists c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



$f'(c)$ expresa la pendiente de la tangente a la gráfica de f en un punto $(c, f(c))$, mientras que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta AB. El teorema expresa, al igual que Rolle, que existe un punto en el cual la tangente es paralela a la recta AB. De modo que Lagrange es una generalización de Rolle.

Demostración:

Consideremos una función g auxiliar, cuya gráfica es la recta AB :

$$g : g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

.....y otra que expresa la diferencia entre f y g (función dada y recta AB):

Veremos que es posible aplicar el teorema de Rolle a la función δ :

f es cont. en $[a,b]$ y derivable en (a,b) por H g es cont. y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ por ser polinómica (lineal)	}	$\xrightarrow{\text{teos. cont. y deriv. suma}}$ δ cont. en $[a,b]$ y derivable en (a,b)
---	---	--

$$\left. \begin{aligned} \delta(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \\ \delta(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta(a) = \delta(b)$$

$$\xrightarrow{\text{por.teo.Rolle}} \exists c \in (a, b) / \delta'(c) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Siendo } \delta'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \delta'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \\ &\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE LAGRANGE:

TEOREMAS:

$$1) \left. \begin{aligned} \text{Si } f'(x) &> 0 \text{ en } (a, b) \\ f \text{ cont.en } &[a, b] \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } [a, b]$$

Demostración : Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera, con $x_1 < x_2$,

Tenemos que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Para ello aplicaremos a f el teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1, x_2]$,

Como dicho intervalo está incluido en el $[a, b]$:

f es cont. en $[x_1, x_2]$ y deriv. en (x_1, x_2) por. H

↓ por teo de Lagrange

$$\left. \begin{aligned} \exists c \in (x_1, x_2) / f'(c) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \text{ por H} \\ \text{como además : } &x_2 - x_1 > 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{regla.sig.}} f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \text{ lqqd.}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \text{Si } f'(x) = 0 \text{ en } (a, b) \\ f \text{ cont. en } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ es constante } (f(x)=k) \text{ en } [a, b]$$

Demostración :

Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera, con $x_1 < x_2$,

Tenemos que demostrar que $f(x_1) = f(x_2)$.

Para ello aplicaremos a f el teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1, x_2]$,

Como dicho intervalo está incluido en el $[a, b]$:

f es cont. en $[x_1, x_2]$ y deriv. en (x_1, x_2) por H

↓ por teo de Lagrange

$$\left. \begin{array}{l} \exists c \in (x_1, x_2) / f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \text{ por H} \\ \text{como además : } x_2 - x_1 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \text{ lqqd.}$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \text{Si } f'(x) = g'(x) \text{ en } (a, b) \\ f \text{ y } g \text{ cont. en } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow f - g \text{ es constante } (f(x)=g(x)+k) \text{ en } [a, b]$$

Para demostrar este teorema basta con aplicar el anterior a la función $f-g$

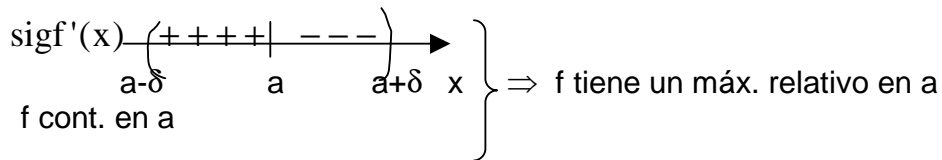
PRIMITIVA (INTEGRAL INDEFINIDA):

Si f y F son funciones tales que : $F'(x) = f(x)$,

se dice que **F es primitiva o integral indefinida de f**. Por el teorema anterior, cualquier otra primitiva de f difiere de F en una constante, de modo que el conjunto de primitivas de f son : $F(x)+k$, con $k \in \mathbb{R}$, se escribe :

$$F(x) = \int f(x) dx$$

4) CONDICIÓN SUFICIENTE DE EXTREMO RELATIVO:



Demostración :

Sea $x_1 \in E_-(a, \delta)$, probaremos que $f(x_1) < f(a)$
 aplicando Lagrange en el intervalo $[x_1, a]$:

f es derivable en (x_1, a) pues en este intervalo (incluido en $E_-(a, \delta)$) :

f'(x) > 0 por H

f es derivable en $[x_1, a)$ por lo mismo $\xrightarrow{\text{teo.deriv-cont.}}$ f es cont. en $[x_1, a)$
 por H f cont en a

\Downarrow

f cont. en $[x_1, a]$

$\xrightarrow{\text{por.teo.de Lagrange}}$ $\exists c \in (x_1, a) / f'(c) = \frac{f(a) - f(x_1)}{a - x_1} > 0$ por H

como además : $x_2 - x_1 > 0$

$$\xrightarrow{\text{regla.sig.}} f(a) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(a) > f(x_1) \text{ lqqd.}$$

De igual forma, tomando un $x_2 \in E_+(a, \delta)$, puede probarse que $f(x_2) < f(a)$
 aplicando Lagrange en el intervalo $[a, x_2]$:

$$\xrightarrow{\text{por.def.máx.rel.}} f \text{ tiene máx. relativo en } a.$$