Práctico Nº 1

1) Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

$\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$ $\quad -\frac{1}{3}\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ $\quad -\frac{1}{3}\in(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$ $\quad 0{,}3\in\mathbb{Z}$

$0{,}3\in\mathbb{Q}$ $\quad 0{,}\overline{3}\in\mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ $\quad -\sqrt{2}\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$

2) Indicar con verdadero o falso, justifique:

i. $\left.\begin{array}{c} x\in\mathbb{Q} \\ \wedge \\ y\in\mathbb{Q}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)\in\mathbb{Q} \\ (x/y)\in\mathbb{Q} \end{cases}$

ii $\left.\begin{array}{c} x\in\mathbb{N} \\ \wedge \\ y\in\mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)\in\mathbb{N} \\ (x/y)\in\mathbb{Q} \end{cases}$

iii. $\left.\begin{array}{c} x\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \\ \wedge \\ y\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \\ (x\,.\,y)\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \end{cases}$

3) Demuestre utilizando el principio de inducción completa que:

a) 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n = $n(n+1)$ $\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$

b) 3 + 8 + 13 + ... +(5n-2) = $\frac{n(5n+1)}{2}$ $\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$

c) (–5) + (– 7) + (–11) + ... +(-2n+3) = $(n+1)(3-n)$ $\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\,;\, n\geq 4$

4) a) Halle los números reales a y b, para que la siguiente igualdad sea válida para j=1 y j=2:

$(-4)+(-1)+2+\ldots+(3j-7)=aj^2+bj$

b) Demuestre que la igualdad es válida $\forall\, j,\, j\in\mathbb{N}^*$ con a y b hallados en la parte anterior

(a=3/2 y b=-11/2)

5) Ídem con:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2i+4)=an^2+bn$$

6) Probar por inducción completa:

1. $\sum_{i=0}^{n} 2^i=2^0+2^1+2^2+\ldots..+2^n=2^{n+1}-1$ $\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$

2. $9^0+9^1+9^2+\ldots..+9^n=\frac{9^{n+1}-1}{8}$ $\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$

7) Te proponen regalarte un millón de dólares dentro de un mes, o un peso hoy, dos mañana, cuatro al día siguiente y así, cada día el doble del anterior durante un mes. ¿Qué prefieres y por qué?

8) Considere la siguiente afirmación: “ $7n^2+3n+5$ es par”.

a) Demuestre que si la afirmación es válida para $n\in\mathbb{N}$ entonces también lo es para *n+1*.

b) Demuestre que la igualdad es falsa si n=100. ¿Cómo explica este resultado y el obtenido en el apartado “a”?

9) Considere la siguiente definición:

$$n! = \begin{cases} 1 & si \quad n=0 \\ (n-1)!.n & si \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calcular utilizando la definición 0!, 1!, 2!, 3!, 4!

b) Deduzca 15! y una fórmula para *n*!.

c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo *n* natural.

10) Considere la siguiente definición:

$$n\Delta = \begin{cases} 0 & si \quad n=0 \\ (n-1)\Delta + 2\mathrm{n} & si \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calcular utilizando la definición $0\ \Delta$, $1\ \Delta$, $2\ \Delta$, $3\ \Delta$, $4\ \Delta$

b) Deduzca $15\ \Delta$ y una fórmula para $n\ \Delta$.

c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo *n* natural.

11) Dada la siguiente definición:

$$a^n = \begin{cases} 1 & si \quad n=0 \\ a^{n-1}.a & si \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

a) Demuestre que dado $m \in \mathbb{N}$ fijo y $a \neq 0$, se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^{n.} a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

12) Pruebe que $n^2 > n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N} / n \geq 3$

13) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^n - 1 = \dot{3}$ (obs: $x = \dot{3} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / x = 3\mathrm{k}$)

14) Complementario:

Observe que:

1 = 1

1 – 4 = - (1 + 2)

1 – 4 + 9 = (1 + 2 + 3)

1 – 4 + 9 – 16 = - (1 + 2 + 3 + 4)

Induzca una ley general y demuéstrela que es cierta para todo natural mayor o igual que 1.