

*Práctica N° 1*

1) Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{3} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \quad -\frac{1}{3} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \quad 0,3 \in \mathbb{Z}$$

$$0,3 \in \mathbb{Q} \quad 0,\bar{3} \in \mathbb{Q} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad -\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$$

2) Indicar con verdadero o falso, justifique:

$$\text{i. } \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \\ \wedge \\ y \in \mathbb{Q}^* \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-y) \in \mathbb{Q} \\ (x/y) \in \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

$$\text{ii. } \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{N} \\ \wedge \\ y \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-y) \in \mathbb{N} \\ (x/y) \in \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

$$\text{iii. } \left. \begin{array}{l} x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \\ \wedge \\ y \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-y) \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \\ (x \cdot y) \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{array} \right.$$

3) Demuestre utilizando el principio de inducción completa que:

$$\text{a) } 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{b) } 3 + 8 + 13 + \dots + (5n-2) = \frac{n(5n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{c) } (-5) + (-7) + (-11) + \dots + (-2n+3) = (n+1)(3-n) \quad \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 4$$

4) a) Halle los números reales a y b, para que la siguiente igualdad sea válida para j=1 y j=2:

$$(-4) + (-1) + 2 + \dots + (3j-7) = aj^2 + bj$$

b) Demuestre que la igualdad es válida  $\forall j, j \in \mathbb{N}^*$  con a y b hallados en la parte anterior  
(a=3/2 y b=-11/2)

5) Ídem con:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (2i+4) = an^2 + bn$$

6) Probar por inducción completa:

$$1. \sum_{i=0}^n 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2. 9^0 + 9^1 + 9^2 + \dots + 9^n = \frac{9^{n+1} - 1}{8} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

7) Te proponen regalarte un millón de dólares dentro de un mes, o un peso hoy, dos mañana, cuatro al día siguiente y así, cada día el doble del anterior durante un mes. ¿Qué prefieres y por qué?

8) Considere la siguiente afirmación: “  $7n^2 + 3n + 5$  es par”.

a) Demuestre que si la afirmación es válida para  $n \in \mathbb{N}$  entonces también lo es para  $n+1$ .

b) Demuestre que la igualdad es falsa si  $n=100$ . ¿Cómo explica este resultado y el obtenido en el apartado “a”?

9) Considere la siguiente definición:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- Calcular utilizando la definición  $0!$ ,  $1!$ ,  $2!$ ,  $3!$ ,  $4!$
- Deduzca  $15!$  y una fórmula para  $n!$ .
- Pruebe que la fórmula es cierta para todo  $n$  natural.

10) Considere la siguiente definición:

$$n\Delta = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ (n-1)\Delta + 2n & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- Calcular utilizando la definición  $0\Delta$ ,  $1\Delta$ ,  $2\Delta$ ,  $3\Delta$ ,  $4\Delta$
- Deduzca  $15\Delta$  y una fórmula para  $n\Delta$ .
- Pruebe que la fórmula es cierta para todo  $n$  natural.

11) Dada la siguiente definición:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ a^{n-1} \cdot a & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

- Demuestre que dado  $m \in \mathbb{N}$  fijo y  $a \neq 0$ , se cumple  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- Demuestre que  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

12) Pruebe que  $n^2 > n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}/n \geq 3$

13) Pruebe que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^n - 1 = 3 \cdot \dots$  (obs:  $x=3 \cdot \dots \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}/x=3k$ )

14) Complementario:

Observe que:

$$1 = 1$$

$$1 - 4 = -(1 + 2)$$

$$1 - 4 + 9 = (1 + 2 + 3)$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)$$

Induzca una ley general y demuéstrela que es cierta para todo natural mayor o igual que 1.