

Práctico N° 6

1. Dadas las siguientes sucesiones, encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ para que los elementos de las sucesiones estén a menos de ϵ de distancia del número indicado $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0$; con ϵ dado en cada caso:

a) $a_n = \frac{6}{n}$ Encontrar n_0 para que $a_n \in E_{(0, \epsilon)}$ con $\epsilon = 0,1$, $\epsilon = 0,001$ y $\epsilon = 0,00001$

b) $b_n = \frac{2n}{1+n}$ Encontrar n_0 para que $b_n \in E_{(2, \epsilon)}$ con $\epsilon = 0,02$ y $\epsilon = \pi 10^{-4}$

c) $c_n = \frac{1-2n}{1+n}$ Encontrar n_0 para que $c_n \in E_{(-2, \epsilon)}$ con $\epsilon = \frac{5}{3823}$

2. Verificar utilizando la definición de límite:

Si $a_n = \frac{2}{n}$ entonces $(a_n) \rightarrow 0$

Si $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ entonces $(a_n) \rightarrow 0$

Si $a_n = \frac{2n+5}{n}$ entonces $(a_n) \rightarrow 2$

Si $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ entonces $(a_n) \rightarrow 0$

3. Dadas las siguientes sucesiones, encontrar algún natural a partir del cuál los elementos son mayores que el k indicado.

i) $a_n = 2n$ $k = 100$

ii) $a_n = 2n$ $k = 13255$

iii) $a_n = 5n+3$ $k = 2055$

iv) $a_n = n^2 - 3$ $k = 10000$

v) $a_n = n^2 + 3n$ $k = 120$

vi) $a_n = n^2 + 3\sqrt{n}$ $k = 5 \cdot 10^6$

vii) $a_n = e^n + 3$ $k = 10300$

viii) $a_n = L(n)$ $k = 600$

viii) $a_n = \sqrt{n}$ $k = 100000$

ix) $a_n = \frac{2n^2 - 5}{n}$ $k = 10000$

(Sug: $\frac{5}{n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 5$)

4. Intuir el límite de cada una de las siguientes sucesiones y demostrarlo:

$a_n = \frac{2n+3}{n}$

$b_n = \frac{3}{n^2}$

$c_n = \frac{3n^2+n}{n}$

$d_n = \frac{3n^2+1}{n}$ (sug: compare con la sucesión anterior)

$e_n = \sqrt{3n+4}$

$f_n = L(3n+4)$

$g_n = e^{3n}$

$h_n = e^{-3n}$

$h_n = e^{-3n} + 5$

5. Indique si las siguientes sucesiones tienen límite:

$a_n = (-1)^n$

$b_n = \frac{(-1)^n}{3n}$

$c_n = (-1)^n 3n$

$d_n = (-1)^{2n} 3n$

6. Probar los siguientes límites usando la definición:

$$(6n+3) \rightarrow +\infty$$

$$(L(n+3)+3) \rightarrow +\infty$$

$$(\sqrt[5]{5n+3}) \rightarrow +\infty$$

$$(1-e^{6n+5}) \rightarrow -\infty$$

7. Calcular los límites de cada una de las siguientes sucesiones:

$$(a_n): a_n = \frac{5}{1-3n}$$

$$(a_n): a_n = \frac{\sqrt[5]{132\pi}}{1+n}$$

$$(a_n): a_n = \frac{5n+5}{3}$$

$$(a_n): a_n = \frac{5}{4} + \frac{5}{4n}$$

$$(a_n): a_n = \frac{5n+5}{4n}$$

$$(a_n): a_n = \frac{5n-5n^2}{n}$$

$$(a_n): a_n = 5n(1-n)$$

$$(a_n): a_n = 5n-5n^2$$

$$(a_n): a_n = 5L(n)+2n$$

$$(a_n): a_n = \frac{5n-5n^2}{n}$$

$$(a_n): a_n = \frac{4n^3-5n^2+3n-8}{2n^2}$$

$$(a_n): a_n = \frac{4n^3-5n^2+3n-8}{-2n^2+3n-5}$$

$$(a_n): a_n = \frac{-2n^2-5n-7}{2n^2+3n-1}$$

$$(a_n): a_n = \frac{-7n^2+2n-7}{3n^3-5n^2-3n-9}$$

$$(a_n): a_n = \frac{L(1/n)}{(1/n)+3}$$

$$(a_n): a_n = \frac{L\left(\frac{1+n}{n}+3\right)}{n+7}$$

$$(a_n): a_n = \frac{e^{2n}+1}{e^n}$$

$$(a_n): a_n = L\left(\frac{n+1}{n^2}\right) + e^{5/n}$$

$$(a_n): a_n = e^{-3n} + 1/n + 7e^{1/n}$$

$$(a_n): a_n = \frac{L(4n^2)}{L(2n)}$$

$$(a_n): a_n = L(2n+5) - L(n)$$

$$(a_n): a_n = e^{2n} - e^n$$

8. a) Probar que:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n} \quad (\text{sug: } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c})$$

b) Calcular el límite de $(a_n) : a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\left(\text{Sug: } \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)$$

c) Calcular los siguientes límites:

$$\lim \sqrt{3n+5} - \sqrt{3n-4}$$

$$\lim 2n - \sqrt{4n^2+3n}$$

9. Demostrar por inducción completa que (e_n) está acotada por 3 ($e_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$), y que es estrictamente creciente ($e_n < e_{n+1}$)

$$(e_n): \begin{cases} e_0 = 0 \\ e_{n+1} = \sqrt{6+e_n} \end{cases}$$