

Práctica N° 3

1) Demuestre utilizando el principio de inducción completa que:

$$a) 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_0^n (2i) = n(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) 3 + 8 + 13 + \dots + (5n-2) = \sum_1^n (5i-2) = \frac{n(5n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$c) (-5) + (-7) + (-11) + \dots + (-2n+3) = \sum_4^n (-2i+3) = (n+1)(3-n) \quad \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 4$$

2) a) Halle los números reales a y b, para que la siguiente igualdad sea válida para $j=1$ y $j=2$:

$$(-4) + (-1) + 2 + \dots + (3j-7) = aj^2 + bj$$

b) Demuestre que la igualdad es válida $\forall j, j \in \mathbb{N}^*$ con a y b hallados en la parte anterior

$$(a=3/2 \text{ y } b=-11/2)$$

3) Ídem con: $\sum_{i=1}^{i=n} (2i+4) = an^2 + bn$

4) Probar por inducción completa: a) $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $9^0 + 9^1 + 9^2 + \dots + 9^n = \frac{9^{n+1} - 1}{8} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) Sea: $(a_n): a_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n=0 \\ a_{n-1} + 5 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ i) Escribir (a_n) en forma no recursiva.

ii) Probar por Inducción Completa que lo que escribe en "i" es igual a la definición de $(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

6) Ídem con: $(b_n): b_n = \begin{cases} 5 & \text{si } n=0 \\ a_{n-1} \cdot 3 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

7) Considere la siguiente definición:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calcular utilizando la definición $0!, 1!, 2!, 3!, 4!$ b) Deduzca $15!$ y una fórmula para $n!$.

c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo n natural.

8) Considere la siguiente sucesión: $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ a_{n-1} + n & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Calcular utilizando la definición a_0, a_1, a_2, a_3 b) Deduzca a_{15} y una

expresión no recursiva para a_n c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo n natural.

9) Ídem anterior, con $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ b_{n-1} + 2n & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

10) Dada la siguiente definición:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ a^{n-1} \cdot a & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

a) Demuestre que dado $m \in \mathbb{N}$ fijo y

$a \neq 0$, se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

11) Pruebe que $n^2 > n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} / n \geq 3$

12) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^n - 1 = 3 \cdot \dots$ (obs: $x = 3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / x = 3k$)

13) Considere la siguiente afirmación: “ $7n^2 + 3n + 5$ es par”.

- a) Demuestre que si la afirmación es válida para $n \in \mathbb{N}$ entonces también lo es para $n+1$.
- b) Demuestre que la igualdad es falsa si $n=100$. ¿Cómo explica este resultado y el obtenido en el apartado “a”?

14) “Repaso”:

1) a) Completar

$$\sum_{i=50}^{120} (3i+4) = \sum_{i=50}^{118} (3i+4) + \dots + \dots \qquad \sum_{i=53}^{100} (i^2) = \sum_{i=54}^{99} (i^2) + \dots$$

b) Calcular a y b para que la igualdad sea cierta para todo $n=0$ y $n=1$

$$\sum_{i=0}^n (3i+4) = \frac{3n^2 + an + b}{2}$$

c) Demostrar que la igualdad es cierta para todo n natural con a y b hallados.

2) a) Demostrar por I.C. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{i=1}^n (-2i+7) = -n^2 + 6n \qquad \sum_{i=1}^n (4^i) = \frac{4^{n+1} - 4}{3}$$

b) Calcular $\sum_{i=1}^{39} (-2i+7)$ y $\sum_{i=40}^{90} (-2i+7)$

3) a) Siendo $f(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ f(n-1)+3 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

i) Calcular $f(3)$ ii) Indicar una fórmula no recursiva para $f(n)$ y probarla por I.C.

b) Prueba que $n^2 > n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

4) A) Probar que: $\sum_{i=1}^n (3i-5) = \frac{3n^2 - 7n}{2}$

B) Si $f_n = \begin{cases} 5 & \text{si } n=0 \\ 2 \cdot f_{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ i) Calcular $f(3)$

ii) Indicar una expresión no recursiva para $f(n)$ y probarla por I.C.