Práctico Nº 4

1. Dadas las siguientes sucesiones, encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ para que los elementos de las sucesiones estén a menos de épsilon de distancia del número indicado $\forall\ n \in \mathbb{N}\,;\, n \geq n_0$; con épsilon dado en cada caso:
   a) $a_n = \dfrac{6}{n}$ Encontrar n_0 para que $a_n \in E_{(0,\epsilon)}$ con $\epsilon = 0{,}1$, $\epsilon = 0{,}001$ y $\epsilon = 0{,}00001$
   b) $b_n = \dfrac{2n}{1+n}$ Encontrar n_0 para que $b_n \in E_{(2,\epsilon)}$ con $\epsilon = 0{,}02$ y $\epsilon = \pi\, 10^{-4}$
   c) $c_n = \dfrac{1-2n}{1+n}$ Encontrar n_0 para que $c_n \in E_{(-2,\epsilon)}$ con $\epsilon = \dfrac{5}{3823}$

2. Verificar utilizando la definición de límite:
   Si $a_n = \dfrac{2}{n}$ entonces $(a_n) \to 0$
   Si $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ entonces $(a_n) \to 0$
   Si $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$ entonces $(a_n) \to 2$
   Si $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ entonces $(a_n) \to 0$

3. Dadas las siguientes sucesiones, encontrar <u>algún</u> natural a partir del cuál los elementos son mayores que el k indicado.

i)	$a_n = 2n$	k = 100	ii)	$a_n = 2n$	k = 13255
iii)	$a_n = 5n+3$	k = 2055	iv)	$a_n = n^2 - 3$	k = 10000
v)	$a_n = n^2 + 3n$	k = 120	vi)	$a_n = \sqrt{n}$	k = 100000
vii)	$a_n = e^n + 3$	k = 10300	viii)	$a_n = L(n)$	k = 600

4. Intuir el límite de cada una de las siguientes sucesiones y demostrarlo:
   $a_n = \dfrac{2n+3}{n}$ $\qquad b_n = \dfrac{3}{n^2}$ $\qquad c_n = \dfrac{3n^2+n}{n}$
   $d_n = \dfrac{3n^2+1}{n}$ (sug: compare con la sucesión anterior)
   $e_n = \sqrt{3n+4}$ $\qquad f_n = L(3n+4)$ $\qquad g_n = e^{3n}$
   $h_n = e^{-3n}$ $\qquad h_n = e^{-3n} + 5$

5. Indique si las siguientes sucesiones tienen límite:
   $a_n = (-1)^n$ $\qquad b_n = \dfrac{(-1)^n}{3n}$ $\qquad c_n = (-1)^n 3n$ $\qquad d_n = (-1)^{2n} 3n$

6. Probar los siguientes límites usando la definición:
   $(6n+3) \to +\infty$ $\qquad (L(n+3)+3) \to +\infty$
   $(\sqrt[5]{5n+3}) \to +\infty$ $\qquad (1 - e^{6n+5}) \to -\infty$

7. Calcular los límites de cada una de las siguientes sucesiones:

$(a_n): a_n = \frac{5}{1-3n}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{\sqrt[5]{132\pi}}{1+n}$

$(a_n): a_n = \frac{5n+5}{3}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{5}{4} + \frac{5}{4n}$

$(a_n): a_n = \frac{5n+5}{4n}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{5n-5n^2}{n}$

$(a_n): a_n = 5n(1-n)$ $\quad$ $(a_n): a_n = 5n-5n^2$

$(a_n): a_n = 5L(n)+2n$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{5n-5n^2}{n}$

$(a_n): a_n = \frac{4n^3-5n^2+3n-8}{2n^2}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{4n^3-5n^2+3n-8}{-2n^2+3n-5}$

$(a_n): a_n = \frac{-2n^2-5n-7}{2n^2+3n-1}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{-7n^2+2n-7}{3n^3-5n^2-3n-9}$

$(a_n): a_n = \frac{L(1/n)}{(1/n)+3}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{L\left(\frac{1+n}{n}+3\right)}{n+7}$

$(a_n): a_n = \frac{e^{2n}+1}{e^n}$ $\quad$ $(a_n): a_n = L\left(\frac{n+1}{n^2}\right) + e^{5/n}$

$(a_n): a_n = e^{-3n} + 1/n + 7e^{1/n}$ $\quad$ $(a_n): a_n = \frac{L(4n^2)}{L(2n)}$

$(a_n): a_n = L(2n+5) - L(n)$ $\quad$ $(a_n): a_n = e^{2n} - e^n$

8. a) Probar que:

$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$ $\qquad$ $\left(sug: \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$

b) Calcular el límite de (a_n) : $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad$ $\left(Sug.: \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$

c) Calcular los siguientes límites:

$lim\ \sqrt{3n+5} - \sqrt{3n-4}$ $\qquad$ $lim\ 2n - \sqrt{4n^2+3n}$

9. Demostrar por inducción completa que (e_n) está acotada por 3 ($e_n \le 3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$), y que es estrictamente creciente $(e_n < e_{n+1})$

$$(e_n): \begin{cases} e_0 = 0 \\ e_{n+1} = \sqrt{6+e_n} \end{cases}$$