

TEMA : **Lugares geométricos.**

- ✓ Rectas y puntos notables en el triángulo.
 - ✓ Circunferencia y círculo. Ángulos con vértice en la circunferencia y central. Arco capaz. Aplicaciones sencillas a lugar geométrico.
 - ✓ Intersección de lugares geométricos. Aplicaciones de lugares geométricos a la construcción de triángulos y otros polígonos.
 - ✓ Cono. Superficie cónica. Secciones con planos paralelos, perpendiculares y oblicuos con el eje.
-

LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO

Supongamos un punto móvil P , que se desplaza en un plano a una distancia constante de un punto fijo O del mismo plano. Sabemos que ese punto recorrerá una circunferencia de centro O y de radio la distancia constante r . El conjunto de puntos de la circunferencia y solamente ellos, constituye el lugar geométrico del punto P .

Definición: Un Lugar Geométrico es entonces, una figura cuyos puntos gozan de una cierta propiedad que no poseen los puntos que no pertenecen a la figura.

Lugares Geométricos Particulares.

- El lugar geométrico de los puntos del plano que distan una longitud dada r de un punto fijo O es la **circunferencia** de centro O y radio r .
- El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos A y B fijos, es la **mediatriz** del segmento AB .
- El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo convexo (xOy) es la **bisectriz** de dicho ángulo.
- El lugar geométrico de los puntos del plano que distan una longitud dada d de una recta fija r es el conjunto de **dos paralelas** a r trazadas a la distancia d de esta recta.
- El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas paralelas es la **paralela media**.

Consejos Útiles para determinar lugares geométricos:

El lugar es una recta, (o varias), si el punto variable:

- está a una distancia constante de una recta fija, en cuyo caso son dos paralelas a la recta fija.
- equidista de dos puntos fijos, en cuyo caso es la mediatriz del segmento determinado por los puntos fijos.
- equidista de dos rectas fijas, en cuyo caso son las bisectrices de los ángulos formados por dichas rectas o la paralela media.

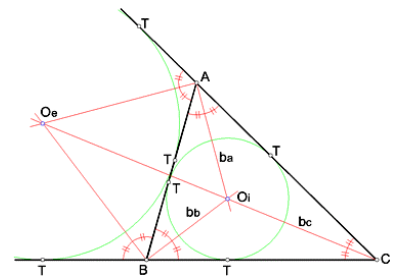
El lugar es una circunferencia (o un arco), si el punto variable:

- Está a una distancia constante r de un punto fijo O , en cuyo caso es una $C(O; r)$.
- Es vértice de un ángulo cuyos lados pasan por puntos fijos, en cuyo caso es un arco capaz.

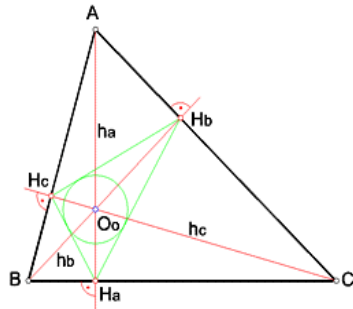
Para recordar: ELEMENTOS NOTABLES DEL TRIANGULO

✓ **BISECTRICES, INCENTRO**

Si trazamos las **bisectrices** de los tres ángulos internos de un triángulo, estas se cortarán en un mismo punto, que se denomina **Incentro (O_i)**, y que resulta ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.



✓ **ALTURAS, ORTOCENTRO**

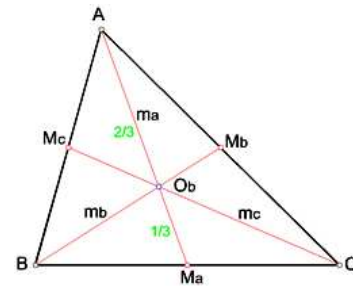


Las **Alturas** de un triángulo, son los segmentos perpendiculares trazados respectivamente desde cada vértice, a la recta que contiene a cada lado opuesto. Las tres **alturas** de un triángulo se cortan en un mismo punto, que se denomina **Ortocentro (O_o)**. El triángulo resultante de unir las tres bases de las alturas (H_a,H_b,H_c), se denomina triángulo órtico, y el Ortocentro(O_o) resulta ser el incentro de dicho triángulo órtico.

• **MEDIANAS Y BARICENTRO**

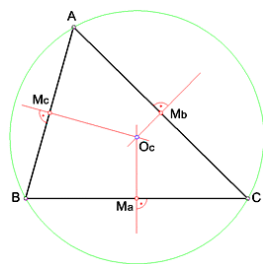
Las **medianas** de un triángulo, son los segmentos determinados por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas de un triángulo se intersectan en un mismo punto, que se denomina **Baricentro(O_b)**. El segmento determinado por cada vértice y el baricentro mide 2/3 de la respectiva mediana.



• **MEDIATRICES Y CIRCUNCENTRO**

Si trazamos las **mediatrices** de los tres lados de un triángulo, estas se cortarán en un mismo punto, que se denomina **Circuncentro(O_c)**, y que resulta ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

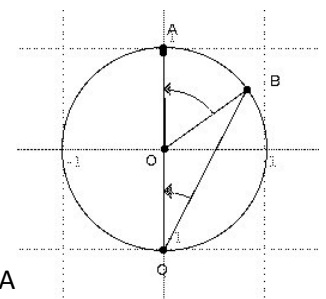


CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

- **CIRCUNFERENCIA:** lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (O). A la distancia a la que se encuentran los puntos del centro le llamamos radio
- **CIRCULO:** conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto O, es menor o igual a una distancia r dada

Ángulo central es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. La medida angular del arco AB es igual a valor del ángulo central que lo abarca $arcoAB = \theta$

Ángulo inscrito es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia



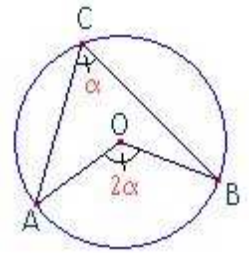
Relación entre un ángulo inscrito y el arco que abarca:

El triángulo QOB es isósceles ya que $OQ=OB$ por ser radios de la misma circunferencia. Entonces $\widehat{B} = \widehat{Q}$.

En el triángulo QOB el ángulo que falta vale $180 - \widehat{O}$ por ser adyacente al ángulo central \widehat{O} .

La suma de los ángulos interiores es 180 y de ahí:

$$2 \cdot \widehat{Q} + 180 - \widehat{O} = 180 \quad \Rightarrow \quad \widehat{Q} = \frac{\widehat{O}}{2} = \frac{\text{arco}AB}{2}$$



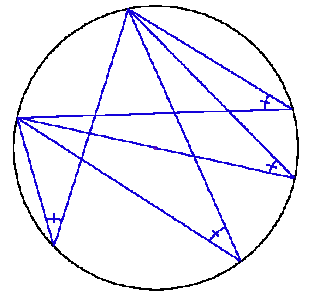
La consecuencia inmediata de esto es que *si dos ángulos inscritos abarcan el mismo arco son iguales* y los dos medirán la mitad de ese arco

ARCO CAPAZ

El **arco capaz** de un segmento AB, es el lugar geométrico de los puntos del plano que son vértices de ángulos de igual medida y cuyos lados pasan por dos puntos A y B.

El arco capaz de un segmento AB, de ángulo λ , es un arco de circunferencia que contiene el vértice del ángulo λ , y los puntos A y B.

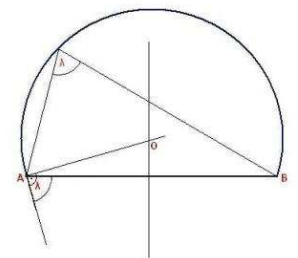
El caso más notorio es el arco capaz del diámetro de una circunferencia, de ángulo $\lambda = 90^\circ$, siendo la misma circunferencia el lugar donde se encuentran todos los vértices de los ángulos que miden 90° , cuyos lados contienen los extremos del diámetro.



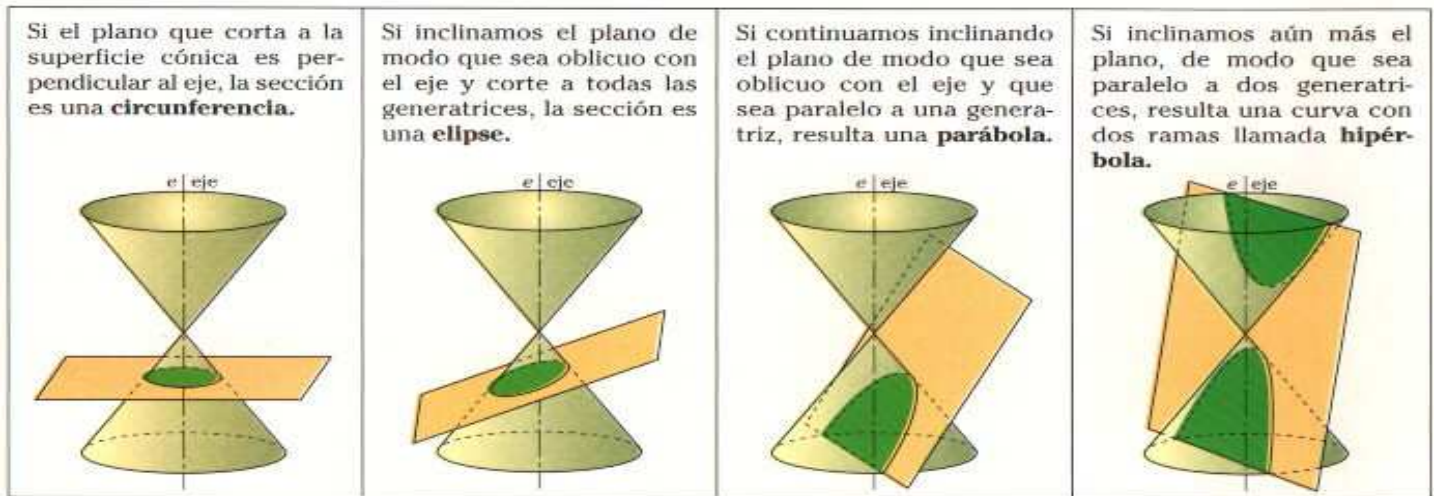
Es muy útil en dibujo geométrico para resolver problemas de polígonos y ángulos.

Para construir el arco capaz, de ángulo λ , del segmento AB:

- se traza la mediatriz m de dicho segmento;
- se trazará una recta r que forme un ángulo λ con el segmento AB, con vértice en A;
- desde A, se dibujará una recta s perpendicular a la recta r.
- El punto de corte O entre la recta s y la mediatriz m es el centro del arco capaz buscado.
- Bastará con dibujar con el compás un arco de centro O y radio OA.



SUPERFICIES CONICAS



Práctico: construcciones geométricas

1. Realizar las siguientes construcciones:
 - a. Mediatriz del segmento AB
 - b. Bisectriz del ángulo COD
 - c. Mediatrices del triángulo EFG (escaleno acutángulo)
 - d. Bisectrices del triángulo HIJ (isósceles rectángulo)
 - e. Medianas del triángulo KLM (escaleno obtusángulo)
 - f. Alturas del triángulo NPQ (isósceles obtusángulo)
2. Trazar el arco capaz al segmento TS (5 cm) siendo la amplitud del ángulo:
 - a. 60° b. 75° c. 105° d. 160° e. 90°
3. Construya en cada caso el T(ABC), sabiendo que:
 - i. $a = 8 \text{ cm}$; $md(A) = 5 \text{ cm}$; $A = 75^\circ$
 - ii. $AB = 9 \text{ cm}$, $\angle ABC = 75^\circ$ $md(C)$ mide 7 cm.
 - iii. $a = 8 \text{ cm}$; $h(A) = 3 \text{ cm}$; $A = 105^\circ$
4. Construya el T(RST) conociendo el ángulo S, el ángulo R y la altura correspondiente al vértice
5. Construye una circunferencia que pase por dos puntos A y B dados y cuyo radio sea 3 unidades.
6. Construye una circunferencia tangente a dos rectas conociendo el punto de tangencia con una de ellas. Discute según la posición de las rectas.
7. Construye una circunferencia que pase por dos puntos A y B dados y cuyo centro diste una longitud d dada de un punto fijo P.
8. Dados tres puntos alineados A, B y C (en ese orden) encuentra un punto P tal que: $\angle APB = 45^\circ$ y $\angle BPC = 60^\circ$.
9. Encuentra un punto que equidiste de las rectas a, b y c (secantes dos a dos)
10. Sean A y B dos puntos fijos, distintos. Determina el lugar geométrico de los simétricos de B respecto de una recta variable r que pasa por A.
11. Dados tres puntos alineados A, B y C (en ese orden) encuentra un punto P tal que: $\widehat{APB} = 45^\circ$ y $\widehat{BPC} = 60^\circ$
12. Dados una recta y un punto perteneciente a ella, encontrar el conjunto de puntos del plano que están a menos de 5 unidades del punto dado, y a menos de 3 unidades de la recta dada.

En cada caso, efectuar las construcciones, determinar el lugar geométrico pedido y justificarlo.