TEMA : **Lugares geométricos.**

- ✓ Rectas y puntos notables en el triángulo.
- ✓ Circunferencia y círculo. Ángulos con vértice en la circunferencia y central. Arco capaz. Aplicaciones sencillas a lugar geométrico.
- ✓ Intersección de lugares geométricos. Aplicaciones de lugares geométricos a la construcción de triángulos y otros polígonos.
- ✓ Cono. Superficie cónica. Secciones con planos paralelos, perpendiculares y oblicuos con el eje.

LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO

Supongamos un punto móvil P, que se desplaza en un plano a una distancia constante de un punto fijo O del mismo plano. Sabemos que ese punto recorrerá una circunferencia de centro O y de radio la distancia constante r. El conjunto de puntos de la circunferencia y solamente ellos, constituye el lugar geométrico del punto P.

Definición: Un Lugar Geométrico es entonces, una figura cuyos puntos gozan de una cierta propiedad que no poseen los puntos que no pertenecen a la figura.

Lugares Geométricos Particulares.

- El lugar geométrico de los puntos del plano que distan una longitud dada r de un punto fijo O es la **circunferencia** de centro O y radio r.

- El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos A y B fijos, es la **mediatriz** del segmento AB.

- El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo convexo (xOy) es la **bisectriz** de dicho ángulo.

- El lugar geométrico de los puntos del plano que distan una longitud dada d de una recta fija r es el conjunto de **dos paralelas** a r trazadas a la distancia d de esta recta.

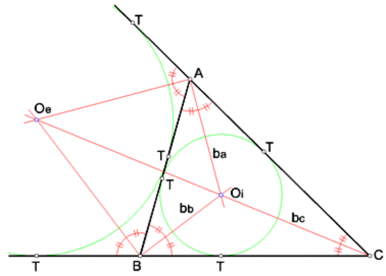
- El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas paralelas es la **paralela media.**

Consejos Útiles para determinar lugares geométricos:

El lugar es una recta, (o varias), si el punto variable:
- está a una distancia constante de una recta fija, en cuyo caso son dos paralelas a la recta fija.
- equidista de dos puntos fijos, en cuyo caso es la mediatriz del segmento determinado por los puntos fijos.
- equidista de dos rectas fijas, en cuyo caso son las bisectrices de los ángulos formados por dichas rectas o la paralela media.

El lugar es una circunferencia (o un arco), si el punto variable:
- Está a una distancia constante r de un punto fijo O, en cuyo caso es una C(O; r).
- Es vértice de un ángulo cuyos lados pasan por puntos fijos, en cuyo caso es un arco capaz.

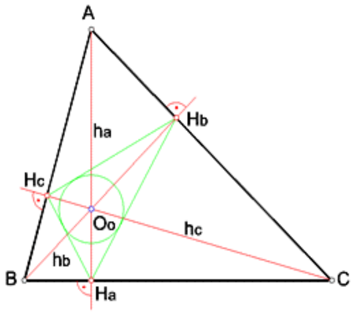
Para recordar: **ELEMENTOS NOTABLES DEL TRIANGULO**



- ✓ **BISECTRICES, INCENTRO**

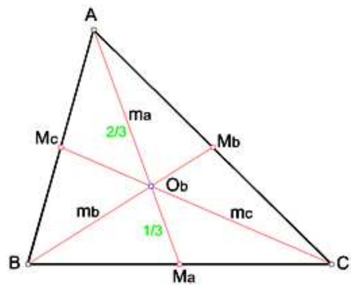
Si trazamos las **bisectrices** de los tres ángulos internos de un triángulo, estas se cortarán en un mismo punto, que se denomina **Incentro (Oi)**, y que resulta ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

- ✓ **ALTURAS, ORTOCENTRO**



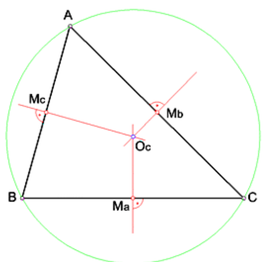
Las **Alturas** de un triángulo, son los segmentos perpendiculares trazados respectivamente desde cada vértice, a la recta que contiene a cada lado opuesto. Las tres **alturas** de un triángulo se cortan en un mismo punto, que se denomina **Ortocentro (Oo)**. El triángulo resultante de unir las tres bases de las alturas (Ha,Hb,Hc), se denomina triángulo órtico, y el Ortocentro(Oo) resulta ser el incentro de dicho triángulo órtico.

- **MEDIANAS Y BARICENTRO**



Las **medianas** de un triángulo, son los segmentos determinados por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.

Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un mismo punto, que se denomina **Baricentro(Ob)**. El segmento determinado por cada vértice y el baricentro mide 2/3 de la respectiva mediana.

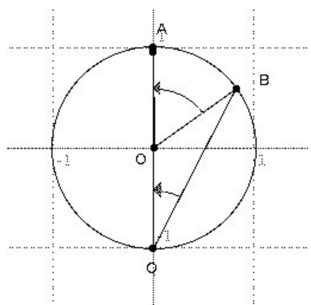


- **MEDIATRICES Y CIRCUNCENTRO**

Si trazamos las **mediatrices** de los tres lados de un triángulo, estas se cortarán en un mismo punto, que se demomina **Circuncentro(Oc)**, y que resulta ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

- **CIRCUNFERENCIA**: lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (O). A la distancia a la que se encuentran los puntos del centro le llamamos radio
- **CIRCULO:** conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto O, es menor o igual a una distancia r dada

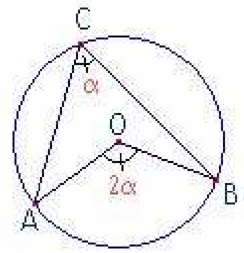


Ángulo central es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia.
La medida angular del arco AB es igual a valor del ángulo central que lo abarca
$arcoAB = \theta$

Ángulo inscrito es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia

Relación entre un ángulo inscrito y el árco que abarca:

El triángulo QOB es isósceles ya que OQ=OB por ser radios de la misma circunferencia. Entonces $\widehat{B} = \widehat{Q}$.



En el triángulo QOB el ángulo que falta vale $180 - \widehat{O}$por ser adyacente al ángulo central $\widehat{O}$.

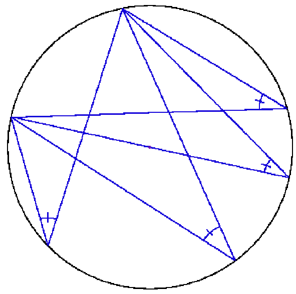
La suma de los ángulos interiores es 180 y de ahí:

$2 \cdot \widehat{Q} + 180 - \widehat{O} = 180$ => $\widehat{Q} = \frac{\widehat{O}}{2} = \frac{arcoAB}{2}$

La consecuencia inmediata de esto es que *si dos ángulos inscritos abarcan el mismo arco son iguales* y los dos medirán la mitad de ese arco

ARCO CAPAZ

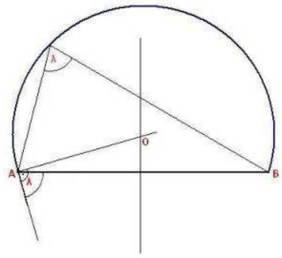
El **arco capaz** de un segmento AB, es el lugar geométrico de los puntos del plano que són vértices de ángulos de igual medida y cuyos lados pasan por dos puntos A y B.



El arco capaz de un segmento AB, de ángulo λ, es un arco de circunferencia que contiene el vértice del ángulo λ, y los puntos A y B.

El caso más notorio es el arco capaz del diámetro de una circunferencia, de ángulo λ = 90º, siendo la misma circunferencia el lugar donde se encuentran todos los vértices de los ángulos que miden 90º, cuyos lados contienen los extremos del diámetro.

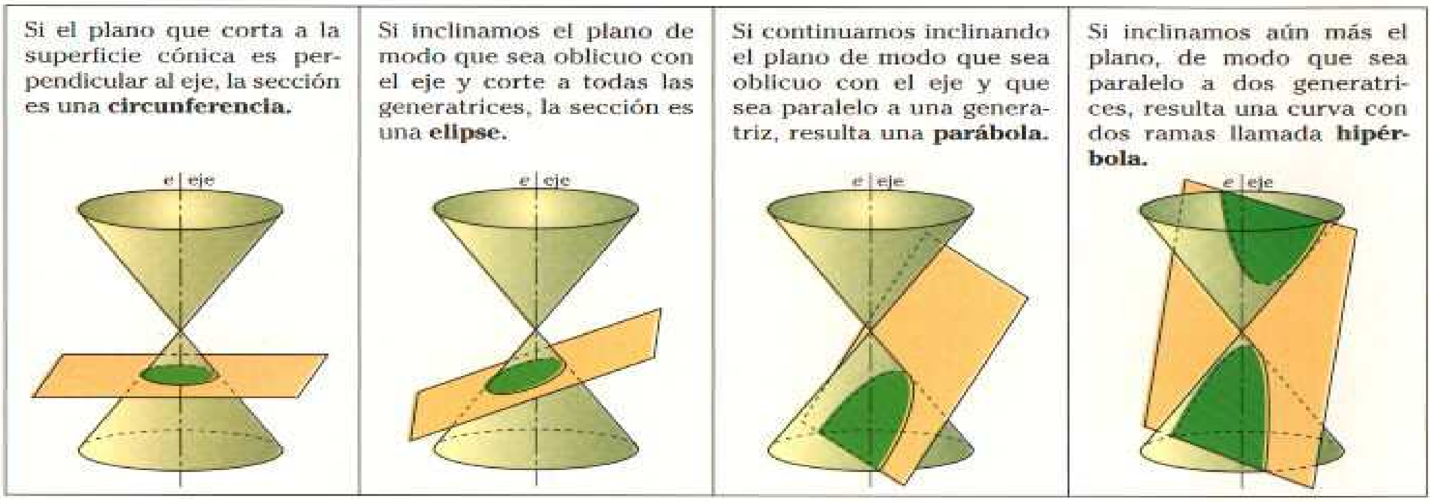
Es muy útil en dibujo geométrico para resolver problemas de polígonos y ángulos.



Para construir el arco capaz, de ángulo λ, del segmento AB:

- se traza la mediatriz m de dicho segmento;
- se trazará una recta r que forme un ángulo λ con el segmento AB, con vértice en A;
- desde A, se dibujará una recta s perpendicular a la recta r.
- El punto de corte O entre la recta s y la mediatriz m es el centro del arco capaz buscado.
- Bastará con dibujar con el compás un arco de centro O y radio OA.

SUPERFICIES CONICAS



Práctico: construcciones geométricas

1. Realizar las siguientes construcciones:
   a. Mediatriz del segmento AB
   b. Bisectriz del ángulo COD
   c. Mediatrices del triangulo EFG (escaleno acutángulo)
   d. Bisectrices del triangulo HIJ (isósceles rectángulo)
   e. Medianas del triángulo KLM (escaleno obtusángulo)
   f. Alturas del triángulo NPQ (isósceles obtusángulo)
2. Trazar el arco capaz al segmento TS (5 cm) siendo la amplitud del ángulo:
   a. 60º b. 75º c. 105º d. 150º e. 90º
3. Construya en cada caso el T(ABC), sabiendo que:
   i. a = 8 cm; md(A) = 5 cm; A= 75º
   ii. AB= 9 cm, $ABC = 75^{\circ}$ md (C) mide 7 cm.
   iii. a = 8 cm ; h(A) = 3 cm ; A= 105º
4. Construya el T(RST) conociendo el ángulo S , el ángulo R y la altura correspondiente al vértice
5. Construye una circunferencia que pase por dos puntos A y B dados y cuyo radio sea 3 unidades.
6. Construye una circunferencia tangente a dos rectas conociendo el punto de tangencia con una de ellas. Discute según la posición de las rectas.
7. Construye una circunferencia que pase por dos puntos A y B dados y cuyo centro diste una longitud d dada de un punto fijo P.
8. Dados tres puntos alineados A, B y C (en ese orden) encuentra un punto P tal que: <APB=45° y <BPC=60°.
9. Encuentra un punto que equidiste de las rectas a, b y c (secantes dos a dos)
10. Sean A y B dos puntos fijos, distintos. Determina el lugar geométrico de los simétricos de B respecto de una recta variable r que pasa por A.
11. Dados una recta y un punto perteneciente a ella, encontrar el conjunto de puntos del plano que están a menos de 5 unidades del punto dado, y a menos de 3 unidades de la recta dada.

En cada caso, efectuar las construcciones, determinar el lugar geométrico pedido y justificarlo.