Práctico Nº 3

1) Demuestre utilizando el principio de inducción completa que:

a) $0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n = \sum_{0}^{n} (2i) = n(n+1) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

b) $3 + 8 + 13 + ... +(5n-2) = \sum_{1}^{n} (5i-2) = \frac{n(5n+1)}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

c) $(-5) + (-7) + (-11) + \ ... \ +(-2n+3) = \sum_{4}^{n} (-2i+3) = (n+1)(3-n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,;\, n \geq 4$

2) a) Halle los números reales a y b, para que la siguiente igualdad sea válida para j=1 y j=2:

$$(-4)+(-1)+2+...+(3j-7) = aj^2+bj$$

b) Demuestre que la igualdad es válida $\forall\, j,\, j \in \mathbb{N}^*$ con a y b hallados en la parte anterior

(a=3/2 y b=-11/2)

3) Ídem con: $\sum_{i=1}^{n} (2i+4) = an^2+bn$

4) Probar por inducción completa: a) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0+2^1+2^2+.....+2^n = 2^{n+1}-1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

b) $9^0+9^1+9^2+.....+9^n = \frac{9^{n+1}-1}{8} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

5) Sea: $(a_n): a_n = \begin{cases} 3 & si \ \ n=0 \\ a_{n-1}+5 & si \ \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ i) Escribir (a_n) en forma no recursiva.

ii) Probar por Inducción Completa que lo que escribe en "i" es igual a la definición de (a_n) $\forall n \in \mathbb{N}$

6) Ídem con: $(b_n): b_n = \begin{cases} 5 & si \ \ n=0 \\ b_{n-1}.3 & si \ \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

7) Considere la siguiente definición:

$$n! = \begin{cases} 1 & si \ \ n=0 \\ (n-1)!.n & si \ \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calcular utilizando la definición 0!, 1!, 2!, 3!, 4! b) Deduzca 15! y una fórmula para *n*!.

c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo *n* natural.

8) Considere la siguiente sucesión: $a_n = \begin{cases} 0 & si \ \ n=0 \\ a_{n-1}+n & si \ \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a) Calcular utilizando la definición a_0 , a_1 , a_2 , a_3 b) Deduzca a_{15} y una expresión no recursiva para a_n c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo *n* natural.

9) Ídem anterior, con $b_n = \begin{cases} 0 & si \ \ n=0 \\ b_{n-1}+2n & si \ \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

10) Dada la siguiente definición:

$$a^n = \begin{cases} 1 & si \ \ n=0 \\ a^{n-1}.a & si \ \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

a) Demuestre que dado $m \in \mathbb{N}$ fijo y $a \neq 0$, se cumple $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$a^n.a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

b) Demuestre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

11) Pruebe que $n^2 > n+3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} / n \geq 3$

12) Pruebe que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad 4^n - 1 = \dot{3}$ (obs: $x = \dot{3} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / x = 3k$)

13) Considere la siguiente afirmación: " $7n^2 + 3n + 5$ es par".

a) Demuestre que si la afirmación es válida para $n \in \mathbb{N}$ entonces también lo es para *n+1*.

b) Demuestre que la igualdad es falsa si n=100. ¿Cómo explica este resultado y el obtenido en el apartado "a"?

14) "Repaso":

1) a) Completar

$$\sum_{i=50}^{120} (3i+4) = \sum_{i=50}^{118} (3i+4) + \ldots\ldots + \ldots\ldots \qquad \sum_{i=53}^{100} (i^2) = \sum_{i=54}^{99} (i^2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) Calcular *a* y *b* para que la igualdad sea cierta para todo n=0 y n=1

$$\sum_{i=0}^{n} (3i+4) = \frac{3n^2 + an + b}{2}$$

c) Demostrar que la igualdad es cierta para todo n natural con *a* y *b* hallados.

2) a) Demostrar por I.C. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{i=1}^{n} (-2i+7) = -n^2 + 6n \qquad \sum_{i=1}^{n} (4^i) = \frac{4^{n+1} - 4}{3}$$

b) Calcular $\sum_{i=1}^{39} (-2i+7)$ y $\sum_{i=40}^{90} (-2i+7)$

3) a) Siendo $f(n) = \begin{cases} 2 & si\, n = 0 \\ f(n-1) + 3 & si\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

i) Calcular f(3) ii) Indicar una fórmula no recursiva para f(n) y probarla por I.C.

b) Prueba que $n^2 > n+7 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$

4) A) Probar que: $\sum_{i=1}^{n} (3i-5) = \frac{3n^2 - 7n}{2}$

B) Si $f_n = \begin{cases} 5 & si\, n = 0 \\ 2.\, f_{n-1} & si\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ i) Calcular f(3)

ii) Indicar una expresión no recursiva para f(n) y probarla por I.C.