Matemática – 6° MD – Practicante Martín Botta – Adscriptor M. Valenzuela

Práctico N°4

1) *Explorando un poco más la elipse.*

- Dibuja, por trazo continuo y en un mismo dibujo, elipses cuyos focos sean dos puntos A y B que se encuentren a 4 unidades entre sí y que:

  i. que su constante sea 6 unidades.
  ii. que contenga a un punto que se encuentra a 10 unidades de un foco y a 6 unidades del otro.
  iii. que contenga un punto que se encuentre a dos unidades de los focos.

- Considera las elipses dibujadas en i. y ii. En este caso, ambas poseen la misma distancia focal. Analiza “la forma” de ambas elipses. ¿Qué diferencia sustancial hay entre ellas que hace que ambas “luzcan” tan diferentes?

- Ahora, investiguemos qué pasa si mantenemos fija nuestra constante y variamos la distancia focal. Dibuja dos elipse cuya constante sea igual y su distancia focal sea distinta (ten en cuenta qué no todos los valores de distancia focal son posibles para una constante determinada y que sería ideal que los valores de distancia focal que elijas difieran en, al menos, 5 unidades).

2) *Explorando un poco más la hipérbola.*

- Dibuja, por puntos (considérate 8 puntos al menos) y en un mismo dibujo, hipérbolas cuyos focos sean dos puntos (A y B) que se encuentren a 4 unidades entre sí y:

  i. que su constante sea 2 unidades.
  ii. que contenga un punto que se encuentra a 1,5 unidades de un foco y a 2,5 unidades del otro.

- Nuevamente, la distancia focal de las hipérbolas de i. y ii. son iguales. Analiza “la forma” de ambas hipérbolas.

3) *Ningún esfuerzo es en vano.*

- Para las elipses e hipérbolas vistas en 1) y en 2), considera un sistema de ejes cartesianos ortogonales cuyo origen coincida con el centro de cada una de las curvas y que el eje focal sea el eje de abscisas. Determina las ecuaciones que verifican sus puntos. Para una elipse, parte de la definición; para las restantes curvas puedes utilizar fórmulas. Determina sus elementos.

4) *La práctica hace al maestro.*

- Determina la ecuación de una elipse que cumpla que:

  i. $F_1(3{,}5); F_2(3{,}2);$ medida del eje mayor: 10
  ii. $V_1(0,-2); V_2(0{,}8); B_1(-4{,}0); B_2(4{,}0)$
  iii. 2c = 12; eje focal // $Ox; C(-1{,}6); \overline{B_1B_2} = 16$
  iv. $B_1(-1{,}3); B_2(-5{,}3), F_1(-3, 3+2\sqrt{3})$
  v. $C(0{,}0); F_1(\sqrt{3}, 0);\ \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertenece a la elipse

  → Determina elementos de las diferentes elipses.

- Determina la ecuación de una hipérbola que cumpla que:

  i. $F_1(4{,}0); F_2(-4{,}0); V_1(-1{,}0)$
  ii. $V_1(0,-5); V_2(0{,}5); as)\ y = \pm x$
  iii. $2b = 16;$ eje focal // $Ox; C(-1{,}6);$ distancia focal:20
  iv. $F_1(0{,}0); F_2(0{,}4); (12{,}9)$ pertenece a la hipérbola
  v. $as_1)\ 2x - y = 0; as_2)\ 2x + y = 0; (3,-5)$ pertenece a la hipérbola

  → Determina elementos de las diferentes hipérbolas.

5) *¡Que la fuerza te acompañe!*

- Determina la ecuación de una elipse cuyos ejes son paralelos a los coordenados; $(1{,}3), (-3{,}3), (-1{,}4)\ y\ \left(0, 3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertenecen a la elipse. Sugerencia: realiza un bosquejo de la situación e intenta dibujar una elipse que cumpla las condiciones pedidas. Ahora, ¿qué más puedes decir de sus ejes?
- Determina la ecuación de una hipérbola cuyos ejes son paralelos a los coordenados; $(-4{,}4), (8{,}6), (-2{,}1)\ y\ (6{,}1)$ pertenecen a la hipérbola.

6) *Y se entró a complicar la cosa…*

- Dadas la siguientes ecuaciones de segundo grado, determinar a qué curvas representan y determinar los elementos que correspondan (coordenadas de focos, centro, vértices, medida de ejes; ecuación de eje focal, eje normal, asíntotas). Bosquejar.

  i. $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$
  ii. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$
  iii. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$
  iv. $-4x^2 + 9y^2 + 16x - 52 = 0$
  v. $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$
  vi. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$
  vii. $y^2 - 9x^2 - 4y + 36x - 41 = 0$
  viii. $x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$
  ix. $-2x^2 - 2y^2 - 16x + 12y - 68 = 0$

7) *Déjà vu.*

- Determina las coordenadas de los puntos de intersección en cada caso. Bosqueja.

   i. $x^2 + 2y^2 = 1 \quad \wedge \quad 4x^2 + y^2 = 4$
   ii. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y = -21 \quad \wedge \quad 9x^2 + 16y^2 + 72x + 64y = 368$
   iii. $9x^2 + 25y^2 = 900 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = \frac{185}{4}$

8) *Y nos vamos por la tangente.*

- Vamos a aceptar que la técnica de la ecuación desdoblada es válida para determinar la ecuación de una recta tangente a una elipse o a una hipérbola por un punto que pertenezca a la misma.

a) Considérate la ecuación de una de las elipses o hipérbolas trabajadas en los ejercicios anteriores y un punto que pertenezca a ella. Determina la ecuación de la recta tangente a dicha curva por ese punto y representa gráficamente.

b) Considera la curva que verifica $8x^2 - y^2 - 32x - 8y + 8 = 0$ y la recta $y = -3x + 1$.
   1. Determina las coordenadas de los puntos de intersección y representa gráficamente.
   2. ¿Cuál es la posición relativa entre estas dos figuras?
   3. Dado que tienes el punto de intersección, verifica que se cumple la técnica de la desdoblada.

9) *¿Quién dijo que solo los niños coloreaban?*

- Representa el conjunto de puntos del plano que verifican:

$$\begin{cases} -8x^2 + y^2 \geq -8 \\ x \leq 2 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y < -4 \\ 3x + 2y \leq 2 \\ -3x + 2y \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16x^2 + 9y^2 + 144 \geq 0 \\ 4x - 3y \leq 0 \\ 4x + 3y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x^2 + 9y^2 + 16x \leq 52 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y \geq -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x - 2y + 3 < 0 \\ 9x^2 - 4y^2 + 36 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y \leq -4 \\ 9x^2 + 4y^2 - 36 \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + 2y^2 - 1).(4x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$(x^2 - y^2 - 1).(x + y^2 - 4) \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 \leq 0 \\ y^2 - 9x^2 - 4y + 36x - 41 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \geq 25 \\ 4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 \geq 0 \\ y \geq -4 \end{cases}$$

10)Ahora, al revés.

- Encuentra un sistema de inecuaciones para el que la región coloreada sea la representación gráfica de su conjunto solución.