Límites de funciones – Resumen teórico – Matemática "A" - Prof. Marcelo Valenzuela

Definición de límite:

Dad una función *f* definida en algún entorno de centro a, decimos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall\ x \in E^*_{a,\delta} \Rightarrow f(x) \in E_{b,\epsilon}$$

Obs:
$$x \in E^*_{a,\delta} \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta$$
$$f(x) \in E_{b,\epsilon} \Leftrightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

Teoremas:

* Si el límite de f existe, éste es único

* Teorema de conservación del signo (T.C.S)

H) $\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad b > 0$

T) $\exists \delta > 0 / \forall\ x \in E^*_{a,\delta} \Rightarrow f(x) > 0$

(análogamente deduzca que sucede si $b<0$)

¿Será cierto el recíproco?

Definiciones - Límites laterales:

Dada una función *f* definida en algún entorno derecho de centro a,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b^+ \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) - b < \epsilon$$

Definiciones:

Siendo f una función definida en algún entorno de centro a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > k$$

Siendo f una función definida en algún intevalo $(p, +\infty)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists h > 0 / \forall x > h \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

¡¡Piense, busque, revise, interprete las demás definiciones que podríamos escribir!!

Álgebra de Límites

Suma

$g(x)$ \ $f(x)$	a	$+\infty$	$-\infty$
b	a+b	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	¿?
$-\infty$	$-\infty$	¿?	$-\infty$

Ejemplo de interpretación de la tabla:

Teorema:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to\beta} g(x)=b\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to\beta} f(x)+g(x)=a+b$$

Multiplicación

$g(x)$ \ $f(x)$	$a(a>0)$	$a(a<0)$	0	$+\infty$	$-\infty$
$b(b>0)$	ab	ab	0	$+\infty$	$-\infty$
$b(b<0)$	ab	ab	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	¿?	¿?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	¿?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	¿?	$-\infty$	$+\infty$

División: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$g(x)$ \ $f(x)$	$a(a>0)$	$a(a<0)$	0	$+\infty$	$-\infty$
$b(b>0)$	a/b	a/b	0	$+\infty$	$-\infty$
$b(b<0)$	a/b	a/b	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	¿?	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	¿?	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	¿?	¿?
$-\infty$	0	0	0	¿?	¿?

Además:

	$\sqrt{f(x)}$	$\sqrt[3]{f(x)}$	$e^{f(x)}$	$L(f(x))$
$a(a>0)$	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$	e^a	$L(a)$
$a(a<0)$	No Definido	$\sqrt[3]{a}$	e^a	No Definido
0^+	0	0	1	$-\infty$
0^-	No Definido	0	1	No Definido
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	No Definido	$-\infty$	0	No Definido

Definición:

$$\boxed{\underset{x\to\alpha}{f \sim g} \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}=1}$$

Teoremas:

$$\left.\begin{array}{c} \underset{x\to\alpha}{f\sim g} \\ \lim\limits_{x\to\alpha}(f.h)(x)=\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\alpha}(g.h)(x)=\beta$$

$$\left.\begin{array}{c} \underset{x\to\alpha}{f\sim g} \\ \lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{h}{f}\right)(x)=\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\alpha}\left(\frac{h}{g}\right)(x)=\beta$$

Ejercicios:

1) Probar que: $3x^2+5x-4 \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^2$

2) Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+2}{x}-x$

3) ¿Son las siguientes afirmaciones correctas? **Demostrar lo afirmado**

$\sqrt{2x^2+3x+8} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2x^2}$ $\qquad e^{x^2+3x+8} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x^2}$ $\qquad L(x^2+3x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} L(x^2)$

4) Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{L(x^2-3x+2)}{L(x^3+5x-4)}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{L(2x^2+7x+2)}{L(6x^3+5x-4)}$

5) Probar que $\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+6x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$ y que $\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+6x} \underset{x\to-\infty}{\sim} -2x$

6) Calcular lim $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+6x}$

Propiedad: $\left.\begin{array}{c} f \underset{x\to\alpha}{\sim} a.h \\ g \underset{x\to\alpha}{\sim} b.h \\ a+b\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f+g \underset{x\to\alpha}{\sim} (a+b)h$

Infinitésimos equivalentes

Definición:

Dada una función real f, decimos que f es un infinitésimo para $x\to\alpha$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$

Propiedades:

Siendo u un infinitésimo con $x\to\alpha$:

$L(1+u) \underset{x\to\alpha}{\sim} u$ $\qquad a^u-1 \underset{x\to\alpha}{\sim} L(a).u \quad (a>0)$ $\qquad e^u-1 \underset{x\to\alpha}{\sim} u$

$sen(u) \underset{x\to\alpha}{\sim} u$ $\qquad \cos(u) \underset{x\to\alpha}{\sim} 1-\frac{(u)^2}{2}$ $\qquad \tan(u) \underset{x\to\alpha}{\sim} u$

Recordar:

$\underset{(u)\to 1}{L(u)\sim u-1}$ $\qquad \underset{(u)\to\pm 1}{L|u|\sim|u|-1}$ $\qquad \underset{(u)\to 0}{e^u-1\sim u}$

Órdenes de infinitos

Dada una función real *f*, decimos que *f* es un infinito para $x \to \alpha$ si y sólo si $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \infty$

Siendo f y g infinitos para $x \to \alpha$ decimos que:

$$ord(f) \underset{x\to\alpha}{<} ord(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$ord(f) \underset{x\to\alpha}{>} ord(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$$ord(f) \underset{x\to\alpha}{=} ord(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

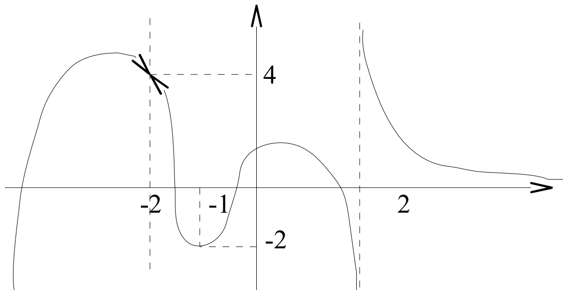
Propiedad: $\boxed{ord\left(L^{\alpha}(u)\right) < ord\left(u^{\beta}\right) \underset{u\to+\infty}{<} ord\left(e^{\gamma . u}\right)}$ α, β y γ positivos

Propiedad:

Siendo f y g dos infinitos para $x \to \alpha$ tal que $ord(f) \underset{x\to\alpha}{<} ord(g)$ entonces: $f + g \underset{x\to\alpha}{\sim} g$

Ejercicios:

1) Se considera una función f cuyo gráfico es:



a) Deduzca a partir del gráfico, dominio y signo de f.
b) Indica si las siguientes afirmaciones son válidas.
   i) $\forall\, \epsilon > 0, \exists \gamma > 0 / \forall\, x \in E^*_{(-2,\gamma)} \Rightarrow f(x) \in E_{(4,\epsilon)}$
   ii) $\forall\, \epsilon > 0, \exists \gamma > 0 / \forall\, x \in E_{(-2,\gamma)} \Rightarrow f(x) \in E_{(4,\epsilon)}$
   iii) $\forall\, \epsilon > 0, \exists \gamma > 0 / \forall\, x \in E_{(-1,\gamma)} \Rightarrow f(x) \in E_{(-2,\epsilon)}$
   iv) $\forall\, k > 0, \exists \gamma > 0 / \forall\, x \in E^*_{(2,\gamma)} \Rightarrow f(x) > k$
   v) Para todo entorno E reducido de centro 0, f(x) es mayor que 0 si $x \in E^*_0$
   vi) Existe un entorno E reducido de centro 0 tal que f(x) es mayor que 0 si $x \in E^*_0$

2) Probar usando las definiciones de límite:

$$\lim_{x\to 2}(3x+5) = 11 \qquad \lim_{x\to 2}(-2x+3) = -1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{2x} = -\infty$$

3) Investigar si las siguientes afirmaciones son ciertas utilizando la definición de equivalentes:

$$\sqrt{x^2+3\mathrm{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{3\mathrm{x}} \qquad \left(x^3+5\mathrm{x}+1\right)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(x^3\right)^2$$

$$L\left(x^2\right)+3 \underset{x\to+\infty}{\sim} 2L(x) \qquad 2\mathrm{x}^4+3\mathrm{x}^2+5\mathrm{x} \underset{x\to 0}{\sim} 2\mathrm{x}^4$$

$$2\mathrm{x}^4+3\mathrm{x}^2+5\mathrm{x} \underset{x\to 0}{\sim} 5\mathrm{x} \qquad e^{x^2+3\mathrm{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x^2+3\mathrm{x}+1/x}$$

4) Probar usando definición de órdenes de infinitos si las siguientes afirmaciones son ciertas:

$$ord\left(e^{3\mathrm{x}+7}\right) \underset{x\to+\infty}{>} ord\left(e^{3\mathrm{x}}\right) \qquad ord\left(\left(x^2\right)L(x)\right) \underset{x\to+\infty}{>} ord\left(x^3\right)$$

$$ord\left((x).L\left(x^2\right)\right) \underset{x\to+\infty}{>} ord\left(L^3(x)\right) \qquad ord\left(\left(x^2+x\right)L\left(x^2+3\mathrm{x}+1\right)\right) \underset{x\to+\infty}{>} ord\left(x^2\right)$$

$$ord\left(L\left(13\mathrm{x}^2-13\mathrm{x}\right)\right) \underset{(x)\to+\infty}{>} ord\left(L(x-3)\right) \qquad ord\left(e^{\left(13\mathrm{x}^2-13\mathrm{x}\right)}\right) \underset{(x)\to+\infty}{....} ord\left(e^{\left(13\mathrm{x}^2\right)}\right)$$