Práctico Nº 3

1) Considere la siguiente definición:

$$n! = \begin{cases} 1 & si \quad n=0 \\ (n-1)!.n & si \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calcular utilizando la definición 0!, 1!, 2!, 3!, 4!
b) Deduzca 15! y una fórmula para *n*!.
c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo *n* natural.

2) Demuestre utilizando el principio de inducción completa que:

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) 0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2n = ...(deduzca la fórmula). $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $3 + 8 + 13 + ... +(5n-2) = \dfrac{n(5n+1)}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

d) $9^0 + 9^1 + 9^2 + ... + 9^n = \dfrac{9^{n+1}-1}{8}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Considere la siguiente definición:

$$n\Delta = \begin{cases} 0 & si \quad n=0 \\ (n-1)\Delta + 2n & si \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Calcular utilizando la definición 0Δ, 1Δ, 2Δ, 3Δ, 4Δ
b) Deduzca 15Δ y una fórmula para $n\Delta$.
c) Pruebe que la fórmula es cierta para todo *n* natural.

4) a) Halle los números reales a y b, para que la siguiente igualdad sea válida para j=1 y j=2:

$$(-4)+(-1)+2+...+(3j-7) = aj^2 + bj$$

b) Demuestre que la igualdad es válida $\forall j, j \in \mathbb{N}^*$ con a y b hallados en la parte anterior.
(a=3/2 y b = -11/2)

5) Ídem con:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (2i+4) = an^2 + bn$$

6) Te proponen regalarte un millón de dólares dentro de un mes, o un peso hoy, dos mañana, cuatro al día siguiente y así, cada día el doble del anterior durante un mes. ¿Qué prefieres y por qué?

7) Observe que:

1 = 1
1 – 4 = - (1 + 2)
1 – 4 + 9 = (1 + 2 + 3)
1 – 4 + 9 – 16 = - (1 + 2 + 3 + 4)

Induzca una ley general y demuéstrela que es cierta para todo natural mayor o igual que 1.

8) Considere la siguiente afirmación: " $7n^2+3n+5$ es par ".

a) Demuestre que si la afirmación es válida para $n \in \mathbb{N}$ entonces también lo es para n+1.

b) Demuestre que la igualdad es falsa si n=100. ¿Cómo explica este resultado y el obtenido en el apartado "a"? ¿Puede encontrar un natural que verifique la propiedad? Justifique.

9) Dada la siguiente definición:

$$a^{n+1} = \begin{cases} 1 & si \quad n=0 \\ a^n . a & si \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

a) Demuestre que dado $m \in \mathbb{N}$ fijo y $a \neq 0$, se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^{n.} a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)$$

10)Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 4^n - 1 = \dot{3}$