Nota: *La presente es un resumen de definiciones y propiedades que se utilizarán en el curso.*

(I) Potencia de Base Real y exponente Natural.

Definición: Sea $a \in \Re^*$, $n \in N^*$ definimos :

$$0^n = 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^n = a^{n-1}.a$$

Observación: No se define "0^0".

Nota: Se puede probar utilizando Inducción Completa las siguientes **propiedades**:
$\forall a$, b $\in$, m, n $\in$ N son válidas las siguientes propiedades: (excluyendo 0^0)

$1) a^n.a^m = a^{n+m}$ $2) \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$3) (a.b)^n = a^n.b^n$ $4) \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$5) (a^n)^m = a^{n.m}$

(II) Base Real y Exponente Entero:

Definición:
Sean $a \in \Re$, y $p \in Z$, $a^2 + p^2 \neq 0$

1. si $p \geq 0 \Rightarrow p \in N$, a^p ya está definido.
2. si $p < 0 \Rightarrow -p \in N$ Definimos:

$$\boxed{a^p = \frac{1}{a^{-p}}}$$

Ejercicios:
Admitiendo las propiedades indicadas en (I) para los números naturales **demostrar**:
$\forall a$, b $\in$, $x, y \in \mathbb{Z}$ son válidas las siguientes propiedades: (excluyendo 0^0)

$1) a^x.a^y = a^{x+y}$ $2) \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a \neq 0$ $3) (a.b)^x = a^x.b^x$

$4) \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $b \neq 0$ $5) (a^x)^y = a^{x.y}$

Ejemplo:

Demostración de $a^x.a^y = a^{x+y}$

$Si\, x, y \in \mathbb{Z}\, entonces:$

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \ \vee \\ x, (-y) \in \mathbb{N} \vee \\ (-x), y \in \mathbb{N} \ \vee \\ (-x), (-y) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si x e y $\in \mathbb{N}$ entonces la propiedad es válida utilizando la propiedad 1 de en el apartado (I).

Demostremos el segundo caso: $x \in \mathbb{N}, -y \in \mathbb{N}$:

$$a^x.a^y = a^x.a^{-(-y)} = \frac{a^x}{a^{(-y)}} = a^{x-(-y)} = a^{x+y}$$

Obsérvese que se utiliza la definición de potencia de exponente entero y la propiedad 2 para números naturales.

Los otros dos casos se demuestran con razonamientos análogos.

(III) Base Real Positiva y Exponente Racional

Definición Previa: ***<u>(Raíz enésima)</u>***

Sean *a* y b dos Reales, y n∈N*

Si $a \geq 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b^n = a \\ b \geq 0 \end{cases}$

Si $a < 0$ y $n \neq \dot{2} \Rightarrow \ \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

<u>Propiedades de raíz enésima</u>:

Sean *a, b*$\in\Re^+$, m y *n* dos naturales, en condiciones de existencia son válidas las siguientes propiedades:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

2. $i)\ \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$

   $ii)\ \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$

3. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

4. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Definición:
Sean $a \in \Re^+$ y p/q $\in$ Q (p$\in$Z, q$\in$N*); definimos:

$$\boxed{a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}}$$

(IV) Base Real Positiva y exponente real.

Definición:
Sean $\boldsymbol{a} \in \Re^+$ y b$\in\Re$.
A = {a^x, x$\in$Q, x < b} $a^b = \overline{ext} A$

<u>Propiedades</u>:

Sean ***a, b*** $\in \Re^+$, *x* y *x'* $\in \Re$, son válidas las siguientes propiedades:

$$a^x.a^{x'} = a^{x+x'}$$

$$\left(a^x\right)^{x'} = a^{x.x'}$$

$$\left(a.b\right)^x = a^x.b^{x'}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}$$

<u>Mas propiedades:</u>

Si a > 1 $\begin{cases} a^x > 1 \quad \forall x \in \Re^+ \\ x < x' \Leftrightarrow a^x < a^{x'} \\ \forall k > 0, \exists x \in \Re^+ / a^x > k \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \Re^- / a^x < \varepsilon \end{cases}$

Si 0 < a < 1 $\begin{cases} a^x < 1 \quad \forall x \in \Re^+ \\ x < x' \Leftrightarrow a^x > a^{x'} \\ \forall k > 0, \exists x \in \Re^- / a^x > k \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \Re^+ / a^x < \varepsilon \end{cases}$