Nota: Resumen de definiciones y propiedades que se utilizarán en el curso.

(I) Potencia de Base Real y exponente Natural.

Definición: Sea $a \in \Re^*$, $n \in N^*$ definimos :

$$0^n = 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^n = a^{n-1}.a$$

Observación: No se define "0^0".

(II) Base Real y Exponente Entero:

Definición:

Sean $a \in \Re$, y $p \in Z$, $a^2 + p^2 \neq 0$

1. si $p \geq 0 \Rightarrow p \in N$, a^p ya está definido.
2. si $p < 0 \Rightarrow -p \in N$ Definimos: $\boxed{a^p = \frac{1}{a^{-p}}}$

(III) Base Real Positiva y Exponente Racional

Definición Previa: (Raíz enésima)

Sean *a* y b dos Reales, y $n \in N^*$

Si $a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b^n = a \\ b \geq 0 \end{cases}$

Si $a < 0$ y $n \neq \dot{2} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Propiedades:

Sean $a, b \in \Re^+$, m y *n* dos naturales, son válidas las siguientes propiedades:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \end{array}}$$

Definición:
Sean $a \in \Re^{+}$ y $p/q \in Q$ ($p \in Z$, $q \in N^*$); definimos:

$$\boxed{a^{p/q} = \sqrt[q]{a^{p}}}$$

(IV) Base Real Positiva y exponente real.

Definición:
Sean $a \in \Re^{+}$ y $b \in \Re$.
$A = \{a^{x}, x \in Q, x < b\}$ $\qquad a^{b} = \overline{ext} A$

<u>Propiedades</u>:

Sean $a, b \in \Re^{+}$, x y $x' \in \Re$, son válidas las siguientes propiedades:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^{x}.a^{x'} = a^{x+x'} \\ \left(a^{x}\right)^{x'} = a^{x.x'} \\ \left(a.b\right)^{x} = a^{x}.b^{x'} \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{x} = \dfrac{a^{x}}{b^{x}} \\ \dfrac{a^{x}}{a^{x'}} = a^{x-x'} \end{array}}$$

<u>Obs</u>: Las propiedades también son válidas, si a o b son negativos, cuando el exponente es un número entero.

<u>Mas propiedades:</u>
$a \in \Re^{+}$:

$$\text{Si } a > 1 \qquad \begin{cases} a^{x} > 1 \quad \forall x \in \Re^{+} \\ x < x' \Leftrightarrow a^{x} < a^{x'} \\ \forall k > 0, \exists x \in \Re^{+} / a^{x} > k \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \Re^{-} / a^{x} < \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{Si } 0 < a < 1 \qquad \begin{cases} a^{x} < 1 \quad \forall x \in \Re^{+} \\ x < x' \Leftrightarrow a^{x} > a^{x'} \\ \forall k > 0, \exists x \in \Re^{-} / a^{x} > k \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \Re^{+} / a^{x} < \varepsilon \end{cases}$$