Límites de Operaciones con Sucesiones

Suma

(a_n) / (b_n)	a	$+\infty$	$-\infty$
b	a+b	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	¿?
$-\infty$	$-\infty$	¿?	$-\infty$

Ejemplo de interpretación de la tabla:

Teorema:

$$\left.\begin{matrix}(a_n)\to a\\(b_n)\to b\end{matrix}\right\}\Rightarrow(a_n+b_n)\to a+b$$

Demostración:

Como hipótesis tenemos:

$(a_n)\to a\Leftrightarrow\forall\,\epsilon_1>0,\exists\,n_1\in\mathbb{N}/\forall\,n>n_1\Rightarrow|a_n-a|<\epsilon_1$ y

$(b_n)\to b\Leftrightarrow\forall\,\epsilon_2>0,\exists\,n_2\in\mathbb{N}/\forall\,n>n_2\Rightarrow|b_n-b|<\epsilon_2$

Queremos probar que

$(a_n+b_n)\to a+b$

Esto significa que:

$\forall\,\epsilon>0,\exists\,n_0\in\mathbb{N}/\forall\,n>n_0\Rightarrow|(a_n+b_n)-(a+b)|<\epsilon$

Trabajemos entonces con $|(a_n+b_n)-(a+b)|$:

$|(a_n+b_n)-(a+b)|=|a_n-a+b_n-b|\leq|a_n-a|+|b_n-b|$ (utilizamos desigualdad triangular)

Dado $\epsilon>0$ puedo encontrar por hipótesis:

$\exists\,n_1\in\mathbb{N}/\forall\,n\geq n_1|a_n-a|<\dfrac{\epsilon}{2}$

$\exists\,n_2\in\mathbb{N}/\forall\,n\geq n_2|b_n-b|<\dfrac{\epsilon}{2}$

Para todos los "n" mayores que el mayor entre n_1 y n_2 se verifican las dos desigualdades.
Entonces:
Siendo $n_0=max\{n_1,n_2\}$

$\forall\,\epsilon>0,\exists\,n_0\in\mathbb{N}/\forall\,n>n_0\Rightarrow|(a_n+b_n)-(a+b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<\dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2}=\epsilon$

Por transitiva concluimos la tesis.

Multiplicación

(a_n) / (b_n)	$a(a>0)$	$a(a<0)$	*0*	$+\infty$	$-\infty$
$b(b>0)$	ab	ab	0	$+\infty$	$-\infty$
$b(b<0)$	ab	ab	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	¿?	¿?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	¿?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	¿?	$-\infty$	$+\infty$

División: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

(a_n) / (b_n)	$a(a>0)$	$a(a<0)$	*0*	$+\infty$	$-\infty$
$b(b>0)$	a/b	a/b	0	$+\infty$	$-\infty$
$b(b<0)$	a/b	a/b	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	¿?	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	¿?	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	¿?	¿?
$-\infty$	0	0	0	¿?	¿?

Obs:

$\lim(a_n)=a^+ \Leftrightarrow \forall \epsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad 0<a_n-a<\epsilon$

$\lim(a_n)=a^- \Leftrightarrow \forall \epsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad 0<a-a_n<\epsilon$

Potencia $\left(a_n^{b_n}\right)$

Usando $a_n^{b_n}=e^{b_n . L(a_n)}$ podemos calcular su límite usando propiedades vistas.

Obs:

No tenemos por ahora herramientas para calcular el límite de $\left(a_n^{b_n}\right)$ cuando:

$(a_n)\rightarrow 0^+$ y $(b_n)\rightarrow 0$; $(a_n)\rightarrow +\infty$ y $(b_n)\rightarrow 0$; $(a_n)\rightarrow 1$ y $(b_n)\rightarrow \pm\infty$

Además se pueden demostrar propiedades más generales como:

Si $(a_n)\rightarrow \pm\infty$ y (b_n) acotado entonces $(a_n+b_n)\rightarrow \pm\infty$.

Si $(a_n)\rightarrow \pm\infty$ y (b_n) acotado entonces $(\frac{b_n}{a_n})\rightarrow 0$.