Sucesiones.

D' Alambert y Órdenes de infinitos

Criterio de D' Alambert para sucesiones

Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y $\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\alpha$ entonces:

1. Si $\alpha<1 \Rightarrow (a_n)\rightarrow 0$
2. Si $\alpha>1 \Rightarrow (a_n)\rightarrow +\infty$

Demostración:

1) Si $\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\alpha$ y $\beta=\frac{1+\alpha}{2}$ se cumple que $\alpha<\beta<1$

Por definición de límite, tomando ϵ menor que la diferencia entre β y α , existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\in\mathbb{N}/n\geq p,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}<\beta \Rightarrow a_{n+1}<\beta.a_n$ (tener presente que $a_n>0$)

La última desigualdad para n = p, n = p+1; n = p+2 ...

$$a_{p+1}<\beta.a_p$$
$$a_{p+2}<\beta.a_{p+1}$$
$$\vdots$$
$$a_n<\beta.a_{n-1}$$
$$a_{n+1}<\beta.a_n$$

(Multiplicando todas las inecuaciones y simplificando):

$$a_{n+1}<\beta^{n-p+1}.a_p \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}<\beta^n.\left(\beta^{1-p}.a_p\right)$$

Dado cualquier ϵ positivo, como $\beta<1$, existe n_0 tal que para todo $n\in\mathbb{N}/n\geq n_0$, $\beta^n.\left(\beta^{1-p}.a_p\right)<\epsilon$ (observar que el segundo factor es constante)

Entonces $\forall n\in\mathbb{N}/n\geq max\{n_0, p\}$ $a_{n+1}<\epsilon$

2) Si $\beta=\frac{1+\alpha}{2}$ ahora se cumple $\beta>1$. Realizando un procedimiento similar, acote a_{n+1} por una expresión menor, que tienda a infinito.

Aplicaciones (ORDENES DE INFINITOS):

1) Demostrar que $\lim \left(\frac{n^{\alpha}}{b^{n}} \right) = 0$ con b>1, $\alpha > 0$

2) Demostrar que $\lim \left(\frac{a_n{}^{\alpha}}{b^{a_n}} \right) = 0$ con $\lim (a_n) = +\infty\,,\ b>1 \ \ y \ \ \alpha>0$

3) Demostrar que $\lim \left(\frac{L^{\alpha}(n)}{n^{\beta}} \right) = 0$ con α y β positivos.

4) Demostrar que $\lim \left(\frac{L^{\alpha}(a_n)}{(a_n)^{\beta}} \right) = 0$ con α y β positivos y $(a_n) \to +\infty$.

Algunas demostraciones:

2) Consideremos $([a_n])$ (parte entera de a_n); se cumple que : $[a_n] \leq a_n < [a_n]+1$
(Obs: $([a_n]) \to +\infty$)

$$\left(\frac{a_n{}^{\alpha}}{b^{a_n}} \right) < \left(\frac{([a_n]+1)^{\alpha}}{b^{[a_n]}} \right) < \left(\frac{([a_n]+[a_n])^{\alpha}}{b^{[a_n]}} \right) < \left(\frac{(2[a_n])^{\alpha}}{b^{[a_n]}} \right) < \left(2^{\alpha} . \frac{([a_n])^{\alpha}}{b^{[a_n]}} \right)$$

Observemos que $(c_n) : c_n = \left(\frac{[a_n]^{\alpha}}{b^{[a_n]}} \right)$ tiene límite 0:

Como $(a_n) \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \forall\, k>0\,, \exists\, n_1 / \forall\, n > n_1 \Rightarrow a_n > k$

y $\lim \left(\frac{n^{\alpha}}{b^{n}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0\,, \exists\, n_2 / \forall\, n > n_2 \Rightarrow \frac{n^{\alpha}}{b^{n}} < \epsilon$

Tomando k entero mayor n_2 se cumple entonces que $c_n < \epsilon$ para todo n natural mayor que n_1 .

Por consiguiente $\left(\frac{a_n{}^{\alpha}}{b^{a_n}} \right)$ es positiva y está acotada por la sucesión (c_n) que tiende a 0. Entonces su límite es 0.

3) Definamos $(z_n) : z_n = L(n) \qquad (obs : (z_n) \to +\infty)$

Si $z_n = L(n) \Rightarrow e^{z_n} = n$ y sustituyendo en $\frac{L^{\alpha}(n)}{n^{\beta}}$ nos queda:

$\frac{L^{\alpha}(n)}{n^{\beta}} = \frac{(z_n)^{\alpha}}{(e^{z_n})^{\beta}} = \frac{(z_n)^{\alpha}}{(e^{\beta})^{z_n}}$ observando que $\beta > 0 \Rightarrow e^{\beta} > 1$ concluimos que la última expresión tiende a 0 dado que z_n tiende a $+\infty$ (Por “2”).